Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2017
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El alumno deberá contestar a una de las dos opciones propuestas A o B.
Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Opción A

1. *a) Despeja X en la siguiente expresión matricial: $M \cdot X \cdot N = P$. (0.5 ptos)*

b) Despeja y calcula X en la siguiente ecuación matricial:

$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} = I$ *, donde I es la matriz identidad de orden 2. (1 pto).*

Solución:

a) $X \cdot N = M^{-1} \cdot P \quad \Rightarrow \quad X = M^{-1} \cdot P \cdot N^{-1}$ (0.5 ptos)

b) En este caso la matriz P del apartado anterior es la matriz identidad, y por lo tanto:

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot I \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 19 & 4 \end{pmatrix}$$

(0.25 ptos por cada inversa bien calculada, 1 pto todo correcto.)

2. *Un coleccionista tiene pesas antiguas de tres pesos distintos. Tiene 8 del mayor peso; 12 de un peso intermedio y 20 del menor peso. Todas las pesas juntas nos dan un peso total de 3800 g. Una pesa intermedia pesa la mitad que una de las mayores. Cuatro pesas de las menores equivalen a una mayor.*

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuál es el valor en gramos de cada uno de los tres tipos de pesas. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

Solución:

a) 0.5 ptos por cada ecuación bien planteada

Si llamamos x = valor en gramos de las pesas mayores, y = valor en gramos de las pesas intermedias, z= valor en gramos de las pesas menores.

Tenemos:

$$\begin{array}{ll} (I) & 8x + 12y + 20z = 3800 \\ (II) & y = \frac{x}{2} \rightarrow -x + 2y = 0 \\ (III) & 4z = x \rightarrow -x + 4z = 0 \end{array}$$

b) 0.5 ptos por la solución correcta del sistema planteado

La solución es: x = 200 ; y = 100 ; z = 50

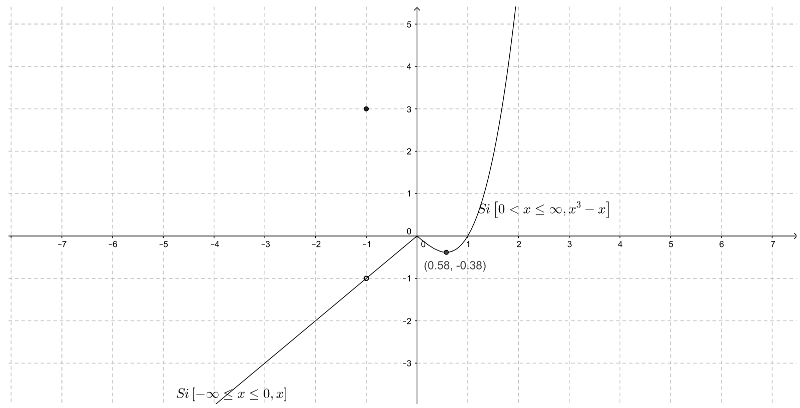
3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x + 2t & si\ x \leq 0 \\ (x+t)^3 - x & si\ x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en x=0? (0.5 ptos)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, +\infty)$. (0.5 ptos)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, +\infty)$. (0.5 ptos)

Solución:



a) Para que sea continua, debe coincidir el valor de la función en ese punto con sus límites laterales.

Saber condiciones (0.25 puntos)

Cálculo correcto del valor, t=$\sqrt{2}$ ó t=-$\sqrt{2}$ ó t=0 (0.25 puntos)

b)

Saber condiciones de extremo (0.25 puntos)

Tiene un mínimo en ($1/\sqrt{3}$,-0.3849002) (0.25 puntos)

c)

En (0, $1/\sqrt{3}$) decreciente y en ($1/\sqrt{3}$, $+\infty$) creciente (0.5 puntos)

4. *De la función $J(x) = a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x$ sabemos que en el origen de coordenadas, su derivada toma el valor -2. Además sabemos que tiene un punto de inflexión en (2 , 0). Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros a, b y c. (1.5 ptos)*

Solución

Realizamos la derivada primera: $J'(x) = 4\,a\,x^3 + 3\,b\,x^2 + c$ y si tenemos en cuenta que

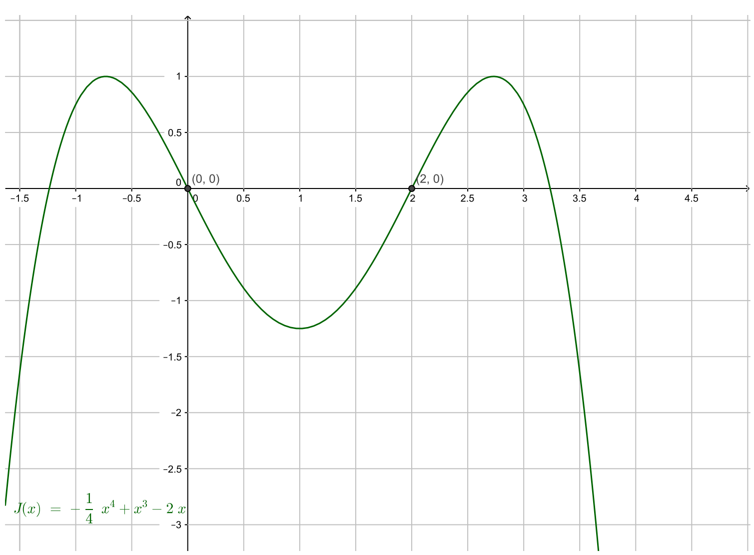
$J'(0) = c = -2$ ya sólo nos quedan las incógnitas a y b. (0.5 ptos)

Por pasar por el punto (2 , 0): $J(2) = 16\,a + 8\,b - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\,a + 2\,b = 1 \quad (I)$ (0.25 ptos)

La derivada segunda es: $J''(x) = 12\,a\,x^2 + 6\,b\,x$ y sabemos que debe ser: $J''(2) = 0$ (0.25 ptos)

Por lo tanto: $48\,a + 12\,b = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\,a + b = 0 \quad (II)$ Restando $(I) - (II) \quad \Rightarrow \quad b = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{1}{4}$ (0.5 ptos)

Y por lo tanto la función queda: $J(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2\,x$



5. *De un estudio sobre accidentes de tráfico se dedujeron los siguientes datos: el 29 % de los conductores superaron los límites de alcohol en sangre, el 14 % de los conductores tenía presencia de drogas en sangre y el 37 % superaba los límites de alcohol o tenía presencia de drogas en sangre o ambas.*

a) Calcula la probabilidad de que, en un accidente de tráfico, el conductor supere los límites de alcohol y tenga presencia de drogas en sangre. (0.75 ptos)

b) Razone si son independientes los sucesos superar los límites de alcohol y presencia de drogas en sangre. (0.75 ptos)

Solución:

A=Alcohol, $P(A)$=0.29; D=Drogas, $P(D)$=0.14; $A \cup D$=Alcohol o Drogas; $P(A \cup D) = 0.37$

a) Plantear correctamente probabilidades (0.25 ptos).

$P(A \cap D) = P(A) + P(D) - P(A \cup D)$=0.29+0.14-0.37=0.06 (0.5 ptos)

b) Son independientes sí y solo sí $P(A \cap D) = P(A)P(D)$

$P(A \cap D)$=0.06 $\neq P(A) * P(D)$= 0.29*0.14=0.0406. Luego no son independientes. (0.75 ptos)

6. *El rendimiento por árbol de una especie de pistacho sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ=1.2 kilos. Se toma una muestra aleatoria de tamaño 40 y se calcula la media muestral, siendo esta igual a 6.7 kilos.*

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del rendimiento con un nivel de confianza del 95 %. (1 pto)

b) Explica razonadamente el efecto que tendría sobre el intervalo de confianza el aumento o la disminución del nivel de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Es razonable que la media de rendimiento de esta especie sea μ=5 kilos, con un nivel de confianza del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

Solución:

a) Del enunciado se deduce: $\bar{x} = 6.7$, n=40, $\sigma = 1.2$; 1- α =0.95, $Z_{\frac{\alpha}{2}}$=1.96 (0.25 ptos)

IC=($\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) (0.25 ptos)

IC= (6.7 - 1,96$\frac{1,2}{\sqrt{40}}$, 6.7 + 1.96$\frac{1,2}{\sqrt{40}}$) =(6.32811, 7.07188) (0.5 ptos)

b) A mayor nivel de confianza, intervalo más ancho a menor valor de confianza, intervalo más estrecho. (0.5 ptos)

c) A menor confianza intervalo más estrecho si no está en el del 95 % tampoco en del 90 %.

No, ya que 5 $\notin$ (6.32811, 7.07188) (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Opción B

1. *Un transportista debe llevar en su camión sacos de cemento y sacos de yeso con las siguientes condiciones: El número de sacos de cemento estará entre 25 y 100 y el número de sacos de yeso estará entre 30 y 90.*

El transportista sabe que un saco de cemento pesa 30 kg y un saco de yeso pesa 20 kg, y se propone cumplir las condiciones llevando en su camión el menor peso posible.

a) Expresa la función objetivo. (0.25 ptos)

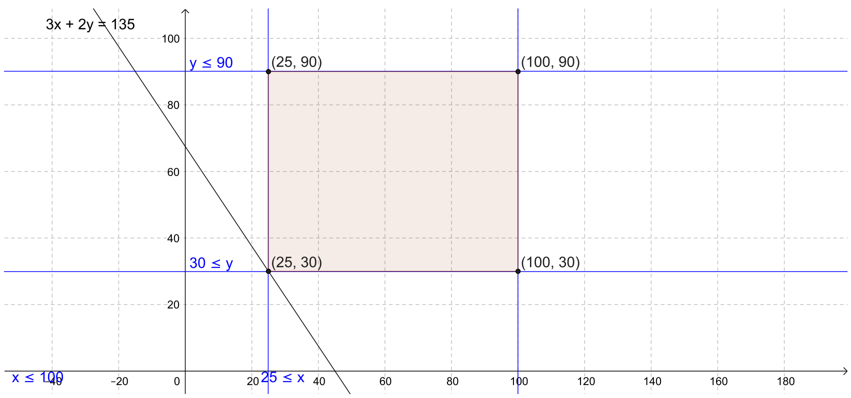
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (0.75 ptos)

c) Halla el número de sacos de cada clase que debe llevar para que el peso transportado sea mínimo. (0.5 ptos)

Solución:

a) Si llamamos x al número de sacos de cemento e y al número de sacos de yeso, tenemos: $F(x, y) = 30x + 20y$ (0.25 ptos)

b) 0.25 ptos por plantear restricciones. 0.25 por dibujar la región factible. Todo correcto 0.75 puntos.



c) 0.5 ptos por solución correcta.

F (A) = $30 \cdot 25 + 20 \cdot 90 = 2550$; F (B) = $30 \cdot 100 + 20 \cdot 90 = 4800$

F (C) = $30 \cdot 100 + 20 \cdot 30 = 3600$; F (D) = $30 \cdot 25 + 20 \cdot 30 = 1350$

Luego el punto óptimo es D; 25 sacos de cemento y 30 sacos de yeso.

2. *A través de una página de internet se han vendido hoy entradas para tres eventos distintos: 120 entradas para un estreno de cine, 50 entradas para una función teatral y 150 entradas para un concierto de música. El valor total de lo recaudado en total por esta venta de entradas es de 6460 euros. Sabemos que el precio de dos entradas de teatro equivale al de cinco entradas de cine. El precio de dos entradas para el concierto musical equivale al de tres entradas de teatro.*

a) Plantea un sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto vale cada una de las entradas para cada evento. (1.5 ptos)

b) Resuelve el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

Solución:

a) 0.5 ptos por cada ecuación bien planteada.

Si llamamos x = precio de una entrada de cine. y = precio de una entrada de teatro, z= precio de una entrada para el concierto.

Tenemos:

$$\begin{array}{l} (I)\ \ 120x + 50y + 150z = 6460 \\ (II)\ \ 5x = 2y \ \rightarrow\ 5x - 2y = 0 \\ (III)\ \ 3y = 2z \ \rightarrow\ 3y - 2z = 0 \end{array}$$

b) 0.5 ptos por la solución correcta del sistema planteado

La solución es: x = 8 euros ; y = 20 euros ; z = 30 euros

3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 & si\ x < -1 \\ 4 & si\ -1 \leq x \leq 1 \\ (tx-6)^2 & si\ x > 1 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = 1. (0.5 ptos)

b) Para t = 2, representa gráficamente la función f. (1 pto)

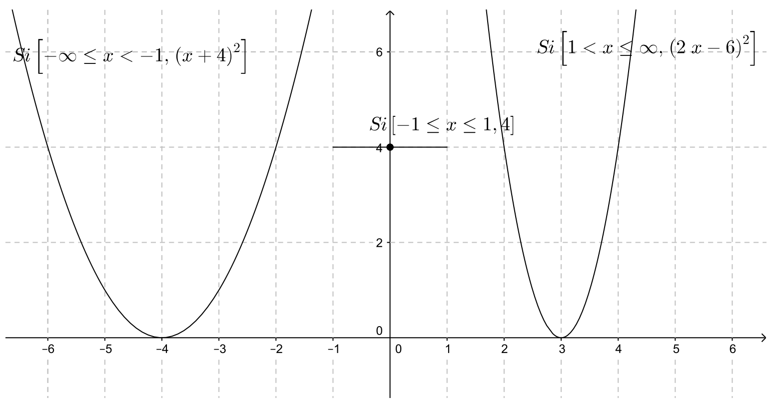
Solución:

a) Para que sea continua, debe coincidir el valor de la función en ese pto con sus límites laterales.

Saber condiciones (0.25 ptos)

Cálculo correcto del valor, t=4 ó t=8 (0.25 ptos)

b)



0.25 ptos por cada trozo bien dibujado. Todo correcto 1 pto.

4. *Un ciclista da una vuelta completa a un circuito de modo que su velocidad a lo largo de este recorrido se ajusta a la función:* $V(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{2}x^3$ *donde V(x) está en Km/h y x en minutos, siendo* $x \geq 0$ *y* $V(x) \geq 0$. *Se pide:*

a) Teniendo en cuenta que el ciclista se detiene cuando completa una vuelta al circuito, calcula cuánto tiempo tarda en completarlo (0.5 ptos).

b) Determina en qué intervalo su velocidad es creciente y en qué intervalo es decreciente (0.5 ptos).

c) Determina en qué instante alcanza la velocidad máxima y cuál es esa velocidad (0.5 ptos).

Solución:

a) Si le ciclista se detiene cuando finaliza la carrera: $V(x) = -\frac{1}{20}x^4 + \frac{1}{2}x^3 = 0 = x^3\left(-\frac{1}{20}x + \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$

Es decir, el ciclista completa el circuito en 10 minutos. (0.5 puntos)

b) $V'(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = x^2\left(-\frac{1}{5}x + \frac{3}{2}\right)$

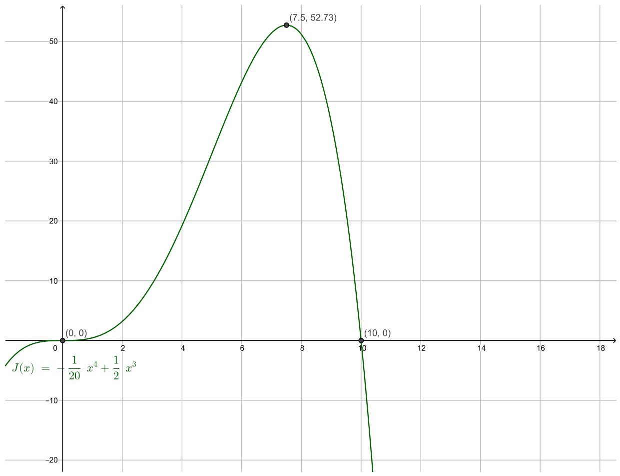
Esta expresión es positiva cuando $0 < x < \frac{15}{2}$ y negativa cuando $\frac{15}{2} < x \leq 10$

Lo que significa que la velocidad es creciente desde los 0 a los 7.5 minutos, y decreciente desde los 7.5 a los 10 minutos. (0.5 puntos)

c) Para determinar la velocidad máxima, igualamos a cero la derivada primera:

$$V'(x) = -\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^2 = x^2\left(-\frac{1}{5}x + \frac{3}{2}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \ \ momento\ \ inicial \\ x = \frac{15}{2} = 7,5\ \ \text{mín}. \end{cases}$$
$$V''(x) = -\frac{3}{5}x^2 + 3x \Rightarrow V''\left(\frac{15}{2}\right) < 0$$

Por lo tanto a los 7.5 minutos se produce la velocidad máxima, que resulta ser: $V\left(\frac{15}{2}\right) = 52.7$ km/h (0.5 puntos)



5. *Una persona que fuma habitualmente tiene una probabilidad 0.1 de padecer cáncer de pulmón en el transcurso de su vida. Suponiendo que el hecho de que una persona padezca cáncer de pulmón es independiente de que otra lo padezca.*

a) Si dos personas fuman habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que las dos padezcan cáncer de pulmón? (0.25 ptos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que padezcan cáncer de pulmón al menos una de cuatro personas que fuman habitualmente? (0.5 ptos)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que padezca cáncer de pulmón exactamente una persona de dos que fuman habitualmente? (0.75 ptos)

Solución:

C= cáncer; P(C)=0.1;

a) P(Dos con cáncer)=P(C)*P(C)=0.1*0.1=0.01. (0.25 ptos)

b) P(Al menos 1)=1-P(ninguna de cuatro)=1-$(0.9)^4$ =0.3439 (0.5 ptos)

c) $P(C1yNC2) + P(NC1yC2) = P(C1 \cap NC2) + P(NC1 \cap C2) =$ 0.1*0.9+0.1*0.9=0.18 (0.75 ptos)

6. *El gasto mensual en electricidad (sin incluir los impuestos) sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ =7 euros. Se eligen al azar 10 hogares y se pide el gasto mensual, siendo estos: 25, 29, 30, 32, 24, 28, 31, 32, 33 y 32 euros respectivamente.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del gasto por hogar, con un nivel de confianza del 97% (1.25 ptos)

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros? (0.75 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:

a) La media muestral es: $\bar{x} = \frac{25+29+30+32+24+28+31+32+33+32}{10} =$ 29.6 euros (0.25 puntos)

Del enunciado se deduce: $n = 10$ y $\sigma = 7$ euros

1- α = 0,97 $\Rightarrow$ $Z_{\frac{\alpha}{2}}$=2.17 (0.25 puntos); IC= ($\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) (0.25 puntos)

IC= (29.6-2.17$\frac{7}{\sqrt{10}}$, 29.6+ 2.17 $\frac{7}{\sqrt{10}}$) = (24.7965, 34.40349) (0.5 puntos)

b) El error viene dado por E= $Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (0.25 puntos)

para E=2 $\Rightarrow$ $n = \left[\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\,\sigma}{E}\right]^2 = \left[\frac{2{,}17 \cdot 7}{2}\right]^2$ =57.68402 (0.5 puntos)

El tamaño mínimo de la muestra para que el error de estimación de la media sea inferior a dos euros, con el mismo nivel de confianza debe ser 58.