Evaluación para el Acceso a la Universidad
Convocatoria de 2020
Materia:
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+4)^2 - 4 & si\ x \leq -2 \\ t & si\ -2 < x < 2 \\ (x-4)^2 - 4 & si\ x \geq 2 \end{cases}$

a) Halla el valor de t para que f sea continua en x = -2. (0.5 ptos)

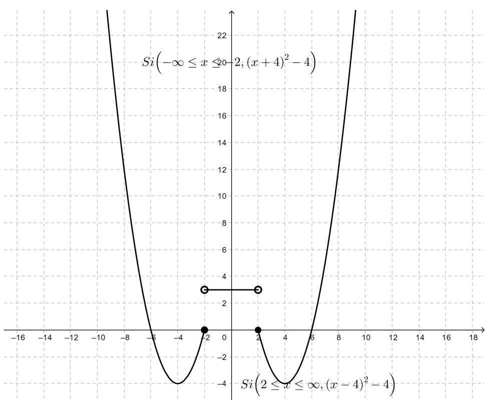
b) Para t = 3, representa gráficamente la función f. (1 pto)

Solución:

a) Para que sea continua, debe coincidir el valor de la función en ese punto con sus límites laterales.

Saber condiciones (0.25 ptos) Cálculo correcto del valor, t=0 (0.25 ptos)

b) 0.25 ptos por cada trozo bien dibujado. Todo correcto 1 pto.



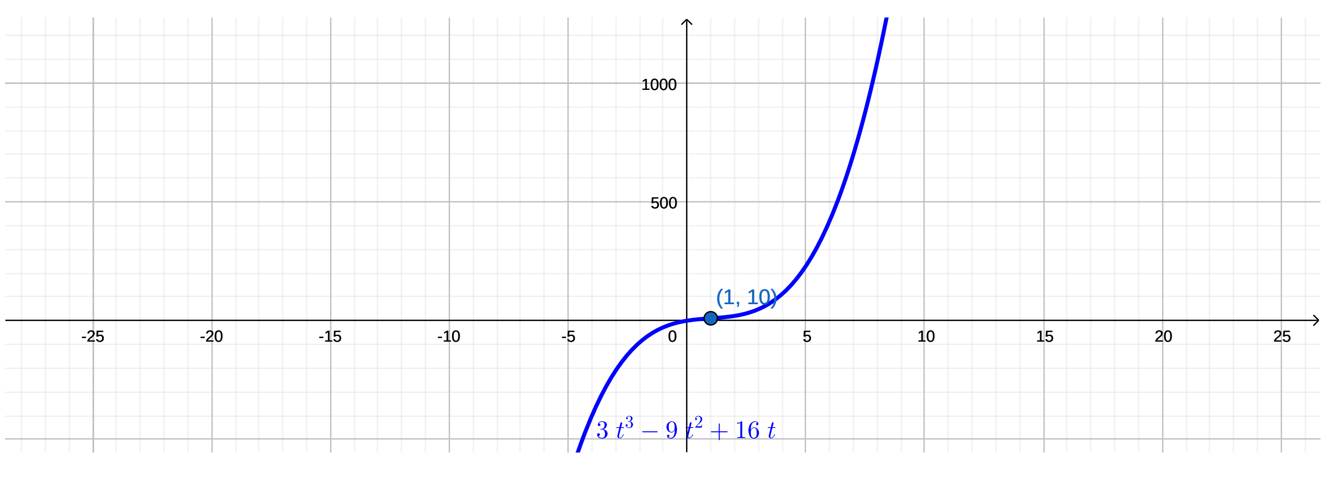
2. *La función* $f(x) = ax^3 + bx^2 + 16x + c$ *tiene un punto de inflexión en* $(1, 10)$ *y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es 7. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros* a, b *y* c*. (1.5 ptos)*

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 16x + c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 16 \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b$$

$$\begin{cases} f'(1) = 7 \\ f(1) = 10 \\ f''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + 2b + 16 = 7 \\ a + b + 16 + c = 10 \\ 6a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3,\ b = -9,\ c = 0 \Rightarrow f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 16x$$

(0.25 por cada condición, 0.75 por la solución)



Sección 1 (3 puntos)Bloque 2

1. *Un artesano hace botines, botas de media caña y botas de caña alta, vendiendo cada par, respectivamente, a 150, 200 y 250 euros. La diferencia entre los botines y las botas de caña alta vendidas equivalen al número de caña media vendidas. El número de caña alta vendidas es la tercera parte de los botines. Por el total de las ventas obtiene 5500 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántas botas de cada tipo se vendieron. (1 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

Solución:

a) Sea $x \equiv$ número de pares de botines, $y \equiv$ número de pares de botas de caña media y $z \equiv$ número de botines de caña alta. (una ecuación bien planteada 0.25 ptos, dos ecuaciones bien planteadas 0.5 ptos, todo correcto 1 pto)

Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} 150x + 200y + 250z = 5500 \\ x - z = y \\ x = 3z \end{cases}$$

b) Con solución: $(x, y, z) = (15, 10, 5)$ pares o (30,20,10) si hablamos de botas individuales. (0.25 ptos por solución correcta y 0.25 ptos por desarrollo)

2. *En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función* $f(x, y) = 6x - 2y$ *sujeta a las siguientes restricciones:*

$$x + y \geq 2; x - y \leq 2; y \leq 1; x \geq 0$$

a) Dibuja la región factible. (1 punto)

b) Determina los vértices de la región factible. (0.25 ptos)

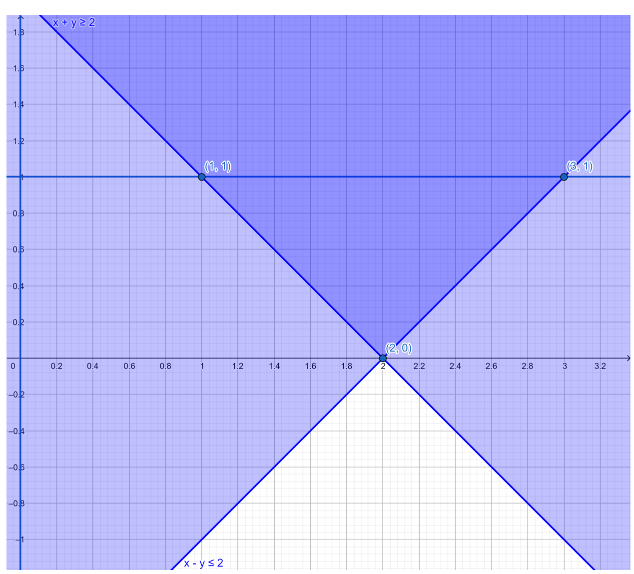
c) Indica el máximo y el mínimo y sus respectivos valores. (0.25 ptos)

Solución:

a) 0.25 por cada inecuación bien representada. Toda la región factible un punto.

b) La solución es un triángulo con vértices (1,1), (2,0) y (3,1). (0.25 ptos)

c) Los valores de la función objetivo en cada uno de los vértices: f(1,1)=4, f$(2,0)$=12 y f(3,1)=16; por lo tanto el mínimo es el punto (1,1) con un valor de 4 unidades y el máximo el punto (3,1) con valor 16 unidades. (0.25 ptos)



<u>Sección 2</u> (3.5 puntos) <u>Bloque 1</u>

3. *En un instituto el 15 % de los alumnos ven la tele todos los días, el 25 % juegan todos los días a la consola y el 26 % ven la tele todos los días o juegan todos los días a la consola o ambos.*

a) Se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que vea la tele todos los días y juegue a la consola todos los días? (0.75 ptos)

b) Si elegimos un alumno al azar y juega todos los días a la consola, ¿cuál es la probabilidad de que vea todos los días la televisión? (0.75 ptos)

Solución:

a) T= Tele; C= consola; P(T)=0.15; P(C)=0.25; $P(T \cup C)$=0.26

$P(T \cap C) = P(T) + P(C) - P(T \cup C)$=0.25+0.15-0.26=0.14. (0.75 ptos)

b) $P(T/C) = P(C \cap T)/P(C)$=0.14/0.25=0.56 (0.75 ptos)

4. *Para hacer un estudio de las horas de duración de la batería de un juguete, se tomó una muestra aleatoria de 10 de estas baterías, siendo el número de horas de duración obtenida de: 4.2, 4.6, 5, 5.7, 5.8, 5.9, 6.1, 6.2, 6.5 y 7.3 respectivamente. Sabiendo que la variable "número de horas de duración de la batería" sigue una distribución normal de desviación típica 2.1 horas, se pide:*

a) Halla el intervalo de confianza para el número medio de horas de duración de la batería con un nivel de confianza del 97 %. (1 pto)

b) Explica razonadamente cómo podríamos disminuir la amplitud del intervalo de confianza. (0.5 ptos)

c) ¿Crees que la media poblacional μ del número de horas es de 4 horas con una probabilidad del 90 %? Razona tu respuesta. (0.5 ptos)

Solución:

a) La media muestral es: $\bar{x} = \frac{4.2+4.6+5+5.7+5.8+5.9+6.1+6.2+6.5+7.3}{10} =$ 5.73 horas. (0.25 ptos)

Del enunciado se deduce: $n = 10$ y σ=2.1 horas

1- α = 0.97 $Z_{\frac{\alpha}{2}}$=2.17 (0.25 ptos)

IC= $\left(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$ (0.25 ptos)

IC= (5.73 - 2.17$\frac{2,1}{\sqrt{10}}$, 5.73+2.17 $\frac{2,1}{\sqrt{10}}$) = (4.28895, 7.17104) (0.25 ptos)

b) Disminuyendo el nivel de confianza o aumentando el tamaño de la muestra (0.5 ptos).

c) Si el intervalo al 97 % es (4.28895, 7.17104) al 90 % será más estrecho con lo que 4 tampoco pertenecerá al intervalo de confianza al 90 %. Por tanto, no creemos que la media pueda ser 4 con una probabilidad del 90 % (0.5 ptos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Sección 2 (3.5 puntos)Bloque 2

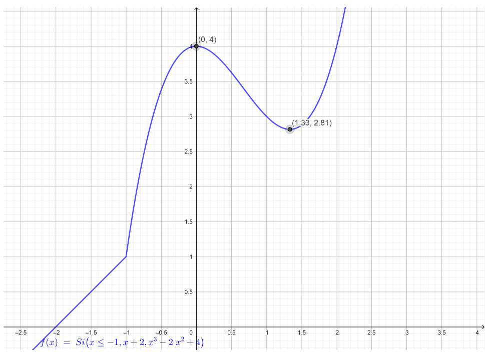
3. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} x+t & si\ x \le -1 \\ x^3 - 2x^2 + 4 & si\ x > -1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en x=-1? (0.75 ptos)

b) Calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, +\infty)$. (0.5 ptos)

c) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1, +\infty)$. (0.5 ptos)

Solución:



a) Para que sea continua, debe coincidir el valor de la función en ese punto con sus límites laterales.

Saber condiciones. (0.5 ptos) Cálculo correcto del valor, t=2. (0.25 ptos)

b) Saber condiciones de extremo (0.25 ptos). Tiene un mínimo en (1.33,2.81) y un máximo relativo en (0,4) (0.25 ptos)

c) En (-1,0) creciente, en (0,1.33) decreciente y creciente e (1.33,+∞) (0.5 ptos)

4. *Las botellas de agua vendidas por un hipermercado (que abre de 10 de la mañana a 4 de la tarde) durante una ola de calor viene dado por la función $C(t) = 2t^3 - 27t^2 + 120t$, con $1 \le t \le 6$ siendo $t = 1$ la primera hora desde la apertura y $t = 6$ la última hora hasta el cierre y $C(t)$ en cientos de botellas.*

a) ¿En que intervalos de tiempo las ventas aumentan? ¿Y en cuáles disminuye? (0.5 ptos)

b) ¿Cuándo se produce la máxima venta? ¿Y la mínima? (0.75 ptos)

c) ¿Cuántas botellas se venden en esos dos casos? (0.5 ptos)

Solución:

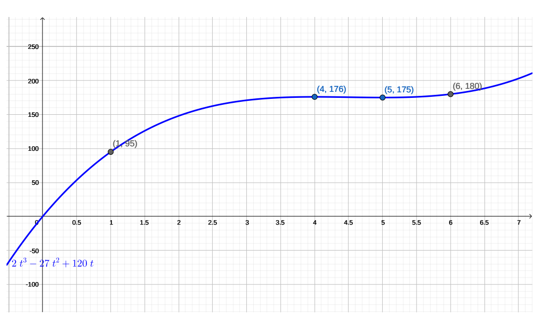
a) $C'(t) = 6t^2 - 54t + 120 \to C'(t) = 0$ para $t = 4$ y $t = 5$

Crece en (1,4), es decir, de 10 de la mañana a 2 de la tarde y en (5,6) que corresponde a la franja horaria que va de 3 de la tarde a 4 de la tarde.(0.25 ptos) Decrece en (4,5), de 2 a 3 de la tarde. (0.25 ptos)

b) y c) $C''(t) = 12t - 54$, $C''(4) = 12{\cdot}4 - 54 = -6 < 0 \Rightarrow m\acute{a}ximo$, $C''(5) = 12{\cdot}5 - 54 = 6 > 0 \Rightarrow mínimo.$

Máximo relativa en 4 y mínimo relativo en 5 (0.25 ptos por el máximo relativo, 0.25 ptos por el mínimo relativo) $C(4) = 176$ y $C(5) = 175$. Pero si tenemos en cuenta los extremos tenemos que G(1)=95 y G(6)=180. La máxima venta será al final de la jornada y la mínima en la primera hora. (0.25 ptos por los dos valores)

El menor número de botellas es en la primera hora y el mayor en la última. con 9500 botellas y 18000 botellas. (0.25 cada valor)



Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. *Una marca ofrece paquetes de tortitas de arroz de tres tipos: con espelta, con amapola y con chía. Se venden el triple de paquetes de las de amapola que de las de espelta. Se venden 40 paquetes más de las de amapola que de las de chía. Los precios de los paquetes para espelta, amapola y chía son respectivamente 2.50, 3.50 y 3 euros obteniendo por la venta de todas las tortitas 1640 euros.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuántos paquetes de cada tipo se vendieron. (1.5 ptos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.5 ptos)

Solución:

a) Sea $x \equiv$ número de paquetes de tortitas con espelta, $y \equiv$ número de paquetes de tortitas con semillas de amapola y $z \equiv$ número de paquetes de tortitas con chía. (cada ecuación bien planteada 0.5 ptos)

Obtenemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2.50x + 3.50y + 3z = 1640 \\ y = 3x \\ y - 40 = z \end{array} \right.$$

b) Con solución: $(x, y, z) = (80, 240, 200)$ paquetes. (0.25 ptos por solución correcta y 0.25 ptos por desarrollo)

6. *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcula $M = A{\cdot}C - (B - I)^T$ *siendo* I *la matriz identidad de orden 2. (0.75 ptos)*

b) Calcula, si es posible, la matriz X *tal que* $X{\cdot}B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$. *(0.75 ptos)*

Solución:

a) $M = A{\cdot}C - (B-I)^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -4 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 26 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 24 & 0 \end{pmatrix}$

(0.25 ptos por el producto, 0.25 ptos por calcular $(B - I)^T$, todo correcto 0.75)

b) $X{\cdot}B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} {\cdot} B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \end{pmatrix}$

(0.5 por cálculo correcto de la inversa, todo correcto 0.75 ptos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 2

5. *En una ciudad el 1 % de los habitantes ha ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas. De las personas que han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, el 70 % tiene problemas financieros. De los habitantes que no han ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas, se sabe que un 5 % tiene problemas financieros.*

a) Calcula la probabilidad de que elegido un habitante al azar tenga problemas financieros. (0.75 ptos)

b) Sabiendo que una persona tiene problemas financieros, ¿cuál es la probabilidad de que haya ido a jugar alguna vez a una casa de apuestas? (0.75 ptos)

Solución: a) P(CA)=0.01; P(F/CA)=0.7; P(F/no CA)=0.05

P(F)=P(F/CA)*P(CA)+P(F/No CA)*P(No CA)=0.7*0.01+0.05*0.99=0.0565 (0.75 ptos)

b) P(CA/F)=P(CA y F)/P(F)=(P(F/CA)*P(CA))/P(F)=(0.7*0.01)/(0.0565)=0.1238 (0.75 ptos)

6. *El tiempo medio de espera en una línea de atención al cliente sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 2$ minutos. Se hace un estudio de los tiempos de espera de 10 clientes al azar, siendo estos tiempos: 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15 y 16 minutos respectivamente.*

a) Halla un intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de espera, con un nivel de confianza del 95 %. (1.25 ptos)

b) ¿Cuál deberá ser el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 1 minuto? (0.75 ptos)

Solución:

a) La media muestral es:

$\bar{x} = \frac{5+6+7+8+9+11+12+14+15+16}{10} = 10.3$ minutos (0.25 ptos)

Del enunciado se deduce: $n = 10$ y $\sigma = 2$ minutos

1- α =0.95 $\Rightarrow$ $Z_{\frac{\alpha}{2}}$=1.96 (0.25 ptos)

IC= ($\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) (0.25 ptos)

IC= (10.3-1.96$\frac{2}{\sqrt{10}}$, 10.3+1.96$\frac{2}{\sqrt{10}}$) = (9.06, 11.54) (0.5 ptos)

b) El error viene dado por E= $Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$(0.25 ptos)

para E= 1 $\Rightarrow$ $n = \left[\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\ \sigma}{E}\right]^2 = \left[\frac{1.96 \cdot 2}{1}\right]^2 = 15.3664$ (0.5 ptos)

El tamaño mínimo de la muestra para que el error de estimación de la media sea inferior a 1 minuto, con el mismo nivel de confianza debe ser 16.

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767