Evaluación para Acceso a la Universidad
Curso 2019/2020

SOLUCIÓN Y CRITERIOS DE CORRECCIÓN
Materia: MATEMÁTICAS II

1a) [1 punto] La inversa de A calculada por el método elegido es $\boxed{A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

Explicación del método o fórmula de la matriz adjunta: 0,25 *puntos. Cálculo del determinante y de la matriz adjunta o proceso del Método de Gauss:* 0,5 *puntos. Resultado final correcto:* 0,25 *puntos.*

1b) [1,5 puntos] $AX + I_3 = BC \Longrightarrow X = (A)^{-1}(BC - I_3)$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Planteamiento razonado del problema: $0,5$ *puntos. Multiplicación de las matrices* BC*:* 0,25 *puntos. Cálculo de* $BC - I_3$: 0,25*. Multiplicación de las matrices* $(A)^{-1}(BC - I_3)$*:* 0,25 *puntos. Resultado final correcto:* $0,25$ *puntos.*

2a) [1,75 puntos] Considerando la matriz de coeficientes del sistema, A, y la ampliada, A^*, el determinante $|A| = a^2 + 2a - 8 = 0 \Longrightarrow a = -4, a = 2$

Si $\boxed{a \neq -4 \text{ y } a \neq 2,\ Rango(A) = Rango(A^*) = 3, \text{ sistema compatible determinado.}}$

Si $\boxed{a = -4,\ Rango(A) = 2,\ Rango(A^*) = 3, \text{ sistema incompatible.}}$

Si $\boxed{a = 2,\ Rango(A) = 2\ Rango(A^*) = 2, \text{ sistema compatible indeterminado.}}$

Cálculo de $|A|$*:* 0,75 *puntos. Valor de los parámetros donde se anula* $|A|$*:* 0,25 *puntos. Discusión razonada del caso en que a es distinto de los valores en los que se anula el determinante de A:* 0,25 *puntos. Discusión razonada en caso* $a = -4$*:* 0,25 *puntos. Discusión razonada en caso* $a = 2$*:* 0,25 *puntos.*

2b) [0,75 puntos] Si $a = 2$, $Rango(A) = Rango(A^*) = 2 \Longrightarrow$ sistema compatible indeterminado. La solución es $\boxed{x = 0,\ y = 1 - \lambda \text{ y } z = \lambda.}$

Planteamiento y proceso de resolución: 0,5 *puntos. Solución correcta:* 0,25 *puntos.*

3a) [1 punto] $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}(2x)} \right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{\operatorname{sen}(2x) - x}{x \operatorname{sen}(2x)} \right) = \dfrac{0}{0}$, indeterminación. Aplicando L'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\operatorname{sen}(2x) - x}{x \operatorname{sen}(2x)} \right) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{2\cos(2x) - 1}{\operatorname{sen}(2x) + 2x\cos(2x)} \right) = \frac{1}{0} = \infty.$$

Detectar indeterminación 0,25 *puntos. Plantear y ejecutar estrategia de resolución* 0,5 *puntos. Resultado final correcto:* 0,25 *puntos.*

3b) [1,5 puntos] Dada $f(x) = \begin{cases} 2^{(x-1)} & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x - 2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ \ln(x-1) & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$ es continua en un punto si el valor de la función en el punto y los límites laterales coinciden.

$\boxed{\text{En } x = 1:}$ $f(1) = 2^{1-1} = 2^0 = 1$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 - 2 = -1$, $\boxed{\text{es discontinua de salto finito}}$.

$\boxed{\text{En } x = 2:}$ $f(2) = \ln(1) = 0$, $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2 - 2 = 0$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \ln(2-1) = \ln(1) = 0$. $\boxed{\text{es continua}}$.

Explicar las condiciones generales de continuidad en un punto: 0,5 *puntos. Analizar continuidad en* $x = 1$*:* 0,25 *puntos. Clasificar el tipo de discontinuidad en el mismo:* 0,25 *puntos. Analizar continuidad en* $x = 2$*:* 0,25 *puntos. Clasificar el tipo de discontinuidad en el mismo:* 0,25 *puntos.*

4a) **[1,5 puntos]** Hay que hallar la superficie mínima, S, de un prisma de base cuadrada de lado x y altura y cuyo volumen es 108 dm^3. La superficie a minimizar es $S(x,y) = x^2 + 4xy$.

Teniendo en cuenta el volumen $V = x^2y = 108$, se tiene que $y = \dfrac{108}{x^2}$, que al sustituir en S resulta $S(x) = x^2 + 4x\dfrac{108}{x^2} = x^2 + \dfrac{432}{x}$.

Derivando e igualando a 0, $S'(x) = 2x - \dfrac{432}{x^2} = 0 \Longrightarrow \dfrac{2x^3 - 432}{x^2} = 0 \Longrightarrow x = 6$ (el resto son raíces complejas). Como $S''(x) = \dfrac{864}{x^3} + 2$, sustituyendo, $S''(6) = \dfrac{864}{6^3} + 2 > 0$ significa que $S(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 6$ e $y = \dfrac{108}{6^2} = 3$. Por lo tanto, $\boxed{\text{las dimensiones de la caja buscada son } x = 6\ dm,\ y = 3\ dm.}$

Definir la función a minimizar: 0,5 puntos. Hallar la derivada: 0,25 *puntos. Obtener le punto crítico:* 0,25 *puntos. Demostrar que es un mínimo* 0,25 *puntos. Dar la solución (el valor de x e y completos):* 0,25 *puntos.*

4b) **[1 punto]** La recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en un punto $x = x_0$ es $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$. Dada $f(x) = x^2 + x - 1$, y el punto $x_0 = 1$, se tiene que $f(1) = 1$, y calculando la derivada y evaluando en el punto, $f'(x) = 2x + 1 \Longrightarrow f'(1) = 3$, luego la pendiente de la recta tangente es 3 y la solución $y - 1 = 3(x - 1) \Longrightarrow \boxed{y = 3x - 2.}$

Escribir ecuación de la recta tangente: 0,25 *puntos. Cálculo del punto de tangencia:* 0,25 *puntos. Cálculo de la pendiente:* 0,25 *puntos. Obtención de la expresión de la recta tangente:* 0,25 *puntos.*

5a) **[1,25 puntos]** Tomando $e^x = t$, entonces, $e^x dx = dt \Longrightarrow dx = \dfrac{dt}{e^x} = \dfrac{dt}{t}$, y sustituyendo en la integral

$$\int \frac{-1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{-1}{t(1+t)}\,dt = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{1+t}\right) dt = \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = -\ln(t) + \ln(1+t) =$$
$$\ln\left(\frac{1+t}{t}\right) = \ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \ln(1+e^x) - \ln(e^x) = \boxed{\ln(1+e^x) - x + C.}$$

Realizar correctamente el cambio de variable y obtener la integral racional: 0,5 *puntos. Hacer la descomposición en fracciones elementales y obtener los coeficientes:* 0,25 *puntos. Resolver las integrales logarítmicas inmediatas:* 0,25 *puntos. Deshacer el cambio y dar la solución correcta:* 0,25 *puntos.*

5b) **[1,25 puntos]** Considerando $h(x) = f(x) - g(x) = (-x^2 + 2x + 4) - (x + 2) = -x^2 + x + 2$, los puntos de corte con el eje de abscisas son $h(x) = 0 \Longrightarrow x = -1$ y $x = 2$. Se comprueba que $f(x) \geq g(x)$ en $x \in [-1, 2]$, luego el área es $A = \displaystyle\int_{-1}^{2} (-x^2 + x + 2)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2} = \boxed{\frac{9}{2} \text{ unidades}^2}$.

Cálculo de los cortes con el eje de abscisas: 0,25 *puntos. Planteamiento del recinto y su correspondiente integral correctamente: 0,25 puntos. Resolución de la integral polinómica:* 0,25 *puntos. Aplicación de la regla de Barrow correctamente:* 0,25 *puntos. Obtención del resultado final:* 0,25 *puntos.*

6a) **[1 punto]** Dado el plano $\pi \equiv x+2y-z-4=0$ y la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x-2y-2 & = & 0 \\ y-z-2 & = & 0 \end{array} \right.$, la distancia del punto $P(1,2,-1)$ al plano es $d(P,\pi) = \dfrac{|1+2\cdot 2-(-1)-4|}{\sqrt{1+2^2+(-1)^2}} = \boxed{\dfrac{2}{\sqrt{6}}.}$

Fórmula escrita correctamente: $0,5$ *puntos. Resultado final correcto:* 0,5 *puntos*

6b) **[1,5 puntos]** El punto intersección de la recta r y el plano π es $A(2,0,-2)$. El área del triángulo formado por los puntos A, $B(1,-1,2)$ y $C(0,1,1)$ se puede calcular usando el producto vectorial (de 3 posibles formas): $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}\|$, donde $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,4)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,1,3)$ y $\overrightarrow{CB}=(1,-2,1)$, luego $A = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\|-7\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}\| = \frac{1}{2}\sqrt{49+25+5} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{83} = 4{,}555 \text{ unidades}^2.}$

Explicación del problema y fórmula correcta del área del triángulo: 0,5 *puntos. Obtención del punto A de corte de la recta y el plano:* 0,25 *puntos. Obtención de los vectores que determinan el paralelogramo:* 0,25 *puntos. Realización del producto vectorial de los vectores:* 0,25 *puntos. Obtención del resultado final:* 0,25 *puntos.*

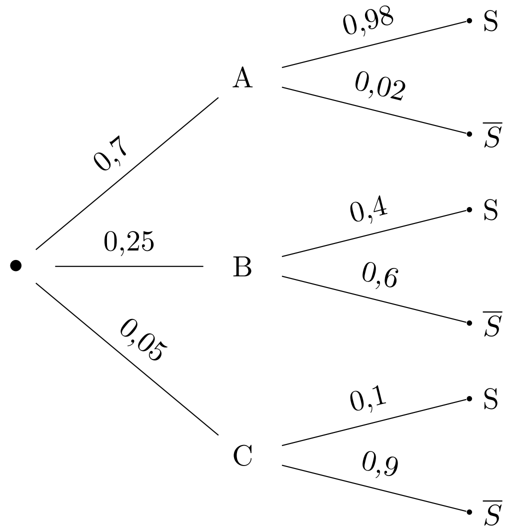
7a) **[1,25 puntos]** Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} 2x-2y & = & 4 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$ definida por el punto $R(2,0,0)$ y el vector director $\vec{v_r}=(1,1,0)$ y $s \equiv \dfrac{x}{3} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$, definida por el punto $S(0,-2,1)$ y el vector director $\vec{v_s}=(3,-2,1)$, se tiene que sus vectores directores son independientes y $Determinante(\overrightarrow{RS},\vec{v_r},\vec{v_s}) = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, por lo que se concluye que las rectas se cruzan.

Explicación y planteamiento del problema: 0,5 *puntos. Obtención de los elementos de las rectas, puntos y vectores directores:* 0,5 *puntos. Cálculo del determinante y conclusión:* 0,25 *puntos.*

7b) **[1,25 puntos]** El vector normal al plano paralelo a las rectas r y s es el productos vectorial de los vectores directores de ambas rectas:
$\vec{n} = \vec{v_r}\times\vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}. \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}-\vec{j}-5\vec{k}$. Por lo tanto, el plano buscado es $x-y-5z+D=0$ que como pasa por $P(-1,0,2) \Longrightarrow -1+0-10+D=0 \Longrightarrow D=11 \Longrightarrow \boxed{x-y-5z+11=0.}$

Planteamiento del problema: 0,5 puntos. Obtención del vector normal: 0,5 puntos. Obtención de la ecuación del plano pedido: 0,25 puntos.

8a) La probabilidad de que un usuario de instagram pertenezca al grupo A="Menores de 34 años" es 0,7, de que pertenezca al grupo B= "Entre 34 y 54 incluídos" es 0,25 y de que peretenezca al C= "Mayores de 54" es 0,05. Las probabilidades de que usuarios de los grupos A, B y C accedan a diario a la red, S= "Sí Accede", son 0,98, 0,4 y 0,1 , respectivamente, y de no acceder, $\overline{S}$, las complementarias.



a.1) **[0,5 puntos]** La probabilidad de que un usuario seleccionado al azar no acceda a dirario aplicando el teorema de la probabilidad total es: $P(\overline{S}) = 0{,}7 * 0{,}02 + 0{,}25 * 0{,}6 + 0{,}05 * 0{,}9 = \boxed{0{,}209}$.
Explicación y planteamiento: 0,25 *puntos. Resultado correcto:* 0,25 *puntos.*

a.2) **[0,75 puntos]** La probabilidad de que un usuario que sí accede a diario pertenezca al grupo B, por el Teorema de Bayes o el diagrama:
$P(B/S) = \dfrac{P(S/B)P(B)}{1 - P(\overline{S})} = \dfrac{0{,}4 * 0{,}25}{0{,}791} = \boxed{0{,}1264}$.
Explicación y planteamiento: 0,25 *puntos. Cálculo de probabilidades auxiliares:* 0,25 *puntos. Resultado correcto:* 0,25 *puntos.*

8b) b.1) **[0,5 puntos]** El tiempo conectado X es una variable aleatoria normal de media $\mu = 53$ y desviación típica $\sigma = 10$. Luego $P(X \geq 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{30 - 53}{10}\right) =$
$1 - P(Z \leq -2{,}3) = 1 - (1 - P(Z \leq 2{,}3)) = P(Z \leq 2{,}3) = \boxed{0{,}9893}$.
Definición de la variable, planteamiento del problema y tipificación: 0,25 *puntos. Resolución:* 0,25 *puntos.*

b.2) **[0,75 puntos]** La probabilidad de que se conecten entre 40 y 67 minutos al día es $P(40 \leq X \leq 67) = P\left(\dfrac{40 - 53}{10} \leq Z \leq \dfrac{67 - 53}{10}\right) = P(Z \leq 1{,}4) - P(Z \leq -1{,}3) = P(Z \leq 1{,}4) - (1 - P(Z \leq 1{,}3)) =$
$0{,}9192 - (1 - 0{,}9032) = 0{,}8224$. Se conectan el $\boxed{82{,}24\,\%}$.
Planteamiento del problema: 0,25 puntos. Tipificación y obtención de la probabilidad: 0,25 puntos. Obtención del porcentaje: 0,25 puntos.