Evaluación para Acceso a la Universidad
Curso 2019/2020

Materia: MATEMÁTICAS II
CRITERIOS DE CORRECCIÓN

Nota: Los procesos de resolución planteados son una guía, las alternativas también se contemplan en la corrección.

1a) **[1,25 puntos]** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $|A| = -a^3 - a^2 + 2a = 0 \Longrightarrow a = 1, -2$ y 0.

Luego, la matriz $\boxed{A \text{ no tiene inversa cuando}}$ el determinate se anula, es decir, para los valores $\boxed{a = 1, -2, 0.}$

Planteamiento razonado del problema: 0,75 puntos. Obtención del determinante: 0,25 puntos. Resultado final: 0,25 *puntos.*

1b) **[1,25 puntos]** Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & z \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, se tiene que cumplir $CD = DC$. Como $CD = \begin{pmatrix} 3x+1 & x-1 \\ z+3y & y-z \end{pmatrix}$ y $DC = \begin{pmatrix} y+3x & z+3 \\ x-y & 1-z \end{pmatrix}$, igualando coeficientes: $\left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ x-z & = & 4 \\ -x+4y+z & = & 0 \\ y & = & 1 \end{array} \right.$ cuya solución es $\boxed{x = 4+\lambda, y = 1 \text{ y } z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}.}$

Planteamiento razonado del problema: 0,5 puntos. Multiplicación de las matrices CD:0.25 puntos. Multiplicación de las matrices DC:0.25 puntos. Resolución y dar la solución al problema 0,25 puntos.

2a) **[1,75 puntos]** Considerando la matriz de coeficientes del sistema, A, y la ampliada, A^*, el determinante $|A| = -a^2 - 2a = 0 \Longrightarrow a = -2$ y $a = 0$.

Si $\boxed{a \neq 0 \text{ y } a \neq -2,\ Rango(A) = Rango(A^*){=}3, \text{ sistema compatible determinado.}}$

Si $\boxed{a = -2,\ Rango(A) = 2 \text{ y } Rango(A^*){=}3, \text{ sistema incompatible.}}$

Si $\boxed{a = 0,\ Rango(A) = 2 \text{ y } Rango(A^*){=}2, \text{ sistema compatible indeterminado.}}$

Cálculo de $|A|$*:* 0,75 *puntos. Valor de los parámetros donde se anula* $|A|$*:* 0,25 *puntos. Discusión razonada del caso en que* a *es distinto de los valores en los que se anula el determinante de* A*:* 0,25 *puntos. Discusión razonada en caso* $a = -2$*:* 0,25 *puntos. Discusión razonada en caso* $a = 0$*:* 0,25 *puntos.*

2b) **[0,75 puntos]** Si $a = 2$, $Rango(A) = Rango(A^*) = 3 \Longrightarrow$ sistema compatible determinado. La solución es $\boxed{x = \frac{3}{4},\ y = \frac{-1}{4} \text{ y } z = 0.}$

Planteamiento y proceso de resolución: 0,5 *puntos. Solución correcta:* 0,25 *puntos.*

3a) **[1,5 puntos]** $\boxed{f(x) \text{ es continua en } (-\infty, 2)}$ por ser cociente de polinomios cuyo denominador no se anula, $\boxed{\text{en } (2,3)}$ por ser coseno una función continua $\boxed{\text{y en } (3,\infty)}$ por ser cociente de funciones continuas cuyo denominador no se anula. Posible discontinuidad en $x = 2$ y $x = 3$.

En $x = 2$, el valor de la función es $f(2) = \cos(2\pi) = 1$, el límite por la izquierda es $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{3}{x-2} = \dfrac{3}{0} = -\infty$ y el límite por la derecha es $\lim_{x\to 2^+} \cos(\pi x) = 1$. Luego, $\boxed{\text{en } x = 2 \text{ hay una discontinuidad de salto infinito}}$.

En $x = 3$, el valor de la función es $f(3) = \cos(3\pi) = -1$, el límite por la izquierda es $\lim_{x\to 3^-} \cos(\pi x) = \cos(\pi 3) = -1$ y el límite por la derecha es $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} = \dfrac{\ln(1)}{0} = \dfrac{0}{0}$, indeterminación. Aplicando L'Hôpital, $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{\ln(x-2)}{3-x} = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{1/(x-2)}{-1} = -1$. Por lo tanto, $\boxed{f(x) \text{ es continua en } x = 3.}$

Análisis de la continuidad para $\mathbb{R}$ excepto los puntos $\{2,3\}$ y planteamiento general: 0,5 *puntos. Estudio de las condiciones de continuidad y clasificación en $x=2$:* 0,5 *puntos. En $x=3$:* 0,5 *puntos.*

3b) [1 punto] $\lim_{x\to 0} \dfrac{xe^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)} = \dfrac{0}{0}$, indeterminación. Aplicando L'Hôpital, $\lim_{x\to 0} \dfrac{xe^{-x}}{1+2x-\cos(x^2)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{e^{-x}-xe^{-x}}{2+2x\,\mathrm{sen}\,(x^2)} = \dfrac{e^0-0}{2+0} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.

Planteamiento general del problema, detección de la indeterminación: 0,5 *puntos. Aplicación regla de L'Hôpital y correcta realización de las derivadas: 0,25 puntos. Obtener el resultado final:* 0,25 *puntos.*

4a) [1,5 puntos] Dada $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+1}$, la derivada $f'(x) = \dfrac{(2x-2)(x^2+1)-(x^2-2x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^2-2}{x^4+2x^2+1} = 0 \Longrightarrow 2x^2-2=0 \Longrightarrow x^2=1 \Longrightarrow x=\pm 1.$

La derivada segunda $f''(x) = \dfrac{4x(x^4+2x^2+1)-(2x^2-2)(4x^3+4x)}{(x^4+2x^2+1)^2} = \dfrac{-4x^5+8x^3+12x}{(x^4+2x^2+1)^2}$.

Como $f''(1)=1>0$ y $f(1)=0$, $f(x)$ tiene un $\boxed{\text{mínimo local en el punto } (1,0).}$

Como $f''(-1)=-1<0$ y $f(-1)=2$, $f(x)$ tiene un $\boxed{\text{máximo local en el punto } (-1,2).}$

Planteamiento razonado del problema: 0,5 puntos. Cálculo de la derivada primera de la función: 0,25 puntos. Obtención de los puntos críticos: 0,25 *puntos. Clasificación de los puntos críticos: 0,25 puntos. Cálculo de las coordenadas:* 0,25 *puntos.*

4b) [1 punto] Como $f(0)=1$ y $f'(0)=-2$, $\boxed{\text{la recta tangente en } x=0 \text{ es}}$ $y-1=-2x \Longrightarrow \boxed{y+2x=1}$ y $\boxed{\text{la recta normal}}$ $y-1=\dfrac{1}{2}x \Longrightarrow \boxed{2y-x=2}$.

Cálculo de la ecuación de la recta tangente: 0,5 puntos. Cálculo de la ecuación de la recta normal: 0,5 puntos.

5a) [1,25 puntos] $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2-2x+1}\,dx = \int\left(\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = \boxed{3\ln(|x-1|)-\frac{1}{x-1}+C}$.

Planteamiento general y descomponer factorialmente el denominador: 0,5 *puntos. Hacer la descomposición en fracciones elementales y obtener los coeficientes correspondientes: 0,5 puntos. Solución final:* 0,25 *puntos.*

5b) [1,25 puntos] Puntos de corte de $g(x)$ con el eje de abscisas: $-x^3+2x^2+3x=0 \Longrightarrow x=0,-1$ y 3. Como $g(x)\le 0$ entre $(-1,0)$ y $g(x)\ge 0$ entre $(0,3)$ entonces el área buscada es $A = \displaystyle\int_{-1}^{0} -g(x)dx + \int_{0}^{3} g(x)dx = -\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} + \left(-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right)\Big|_{0}^{3} = \frac{7}{12}+\frac{45}{4} = \boxed{\frac{71}{6}u^2.}$

Planteamiento general del problema: 0,5 *puntos. Cálculo de los cortes de la función con el eje de abscisas (puntos de abscisa):* 0,25 *puntos. Planteamiento de los recintos y de sus correspondientes integrales: 0,25 puntos. Obtención del resultado final:* 0,25 *puntos.*

6a) [1 punto] Dado el plano $\pi_1 \equiv 2x+y+z-2=0$ y el plano $\pi_2 \equiv \begin{cases} x &= -1+\lambda-\mu \\ y &= -\lambda+\mu \\ z &= -2+2\lambda \end{cases}$, cuya ecuación implícita es $\pi_2 = \begin{vmatrix} x+1 & y & z+2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2x-2y-2=0$. Sus respectivos vectores normales son $\overrightarrow{n_1}=(2,1,1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(-2,-2,0)$. El ángulo que forman los dos planos viene dado por:

$\cos(\alpha) = \dfrac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{\|\overrightarrow{n_1}\|\|\overrightarrow{n_2}\|} = \dfrac{|(2,1,1)\cdot(-2,-2,0)|}{\|(2,1,1)\|\|(-2,-2,0)\|} = \dfrac{6}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = \dfrac{3}{\sqrt{12}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Luego el ángulo que forman los dos planos es $\boxed{\alpha = arcos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{6} \text{ ó } 30^{\text{o}}.}$

Fórmula correctamente escrita: 0,5 *puntos. Obtención de los vectores normales de los planos:* 0,25 *puntos. Obtención del ángulo:* 0,25 *puntos.*

6b) **[1,5 puntos]** El punto de corte del plano $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 2 = 0$ con el eje x es $A(1, 0, 0)$, con el eje y es $B(0, 2, 0)$ y con el eje z es $C(0, 0, 2)$. Dado $P(3, -3, 2)$ y los vectores $\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 2)$ y $\overrightarrow{AP} = (2, -3, 2)$, el volumen del tetraedro que forman viene dado por:

$$V = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AP})|}{6} = \frac{|det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AP})|}{6} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{6}{6} = \boxed{1}.$$

(Similar con los vectores con origen en B: $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC} = (0, -2, 2)$ y $\overrightarrow{BP} = (3, -5, 2)$ ó con origen en C, $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CP} = (3, -3, 0)$).

Explicación del problema y fórmula correcta del volumen del tetraedro: 0,5 *puntos. Obtención de los puntos de corte del plano con los ejes coordenados: 0,5 puntos. Obtención de los vectores que determinan el paralelepípedo:* 0,25 *puntos. Obtención del resultado final:* 0,25 *puntos.*

7a) **[1,5 puntos]** Para que la recta $s \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x - 2y & = & 1 - b \\ z & = & -3 \end{array} \right.$ esté contenida en el plano $\pi \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -1 + \mu \\ y & = & 1 + \lambda + a\mu \\ z & = & 1 + 2\lambda - \mu \end{array} \right.$, basta con obligar a que el vector director de la recta y el normal al plano sean ortogonales y que un punto de la recta esté en el plano.

La ecuación implícita del plano es $\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \end{vmatrix} = (-2a - 1)x + 2y - z - 2a - 2 = 0$, de donde se obtiene su vector normal $\vec{n} = (-2a - 1, 2, -1)$.

La ecuación paramétrica de la recta $s \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 2\lambda + 1 - b \\ y & = & \lambda \\ z & = & -3 \end{array} \right.$ con vector director $\vec{v}_s = (2, 1, 0)$.

El producto escalar $\vec{n} \cdot \vec{v}_s = -4a = 0 \Longrightarrow a = 0$. Tomando el punto $P(1 - b, 0, -3) \in s$ y sustituyendo en la ecuación implícita de $\pi \equiv -x + 2y - z - 2 = 0 \Longrightarrow b - 1 + 3 - 2 = 0 \Longrightarrow b = 0$. Luego, $\boxed{\text{los valores buscados son } a = 0 \text{ y } b = 0.}$

Explicar las condiciones para que una recta esté incluida en un plano: 0,5 *puntos. Cálculo vector normal plano:* 0,25 *puntos. Cálculo vector director de la recta:* 0,25 *puntos. Cálculo del parámetro a:* 0,25 *puntos. Cálculo del parámetro b :* 0,25 *puntos.*

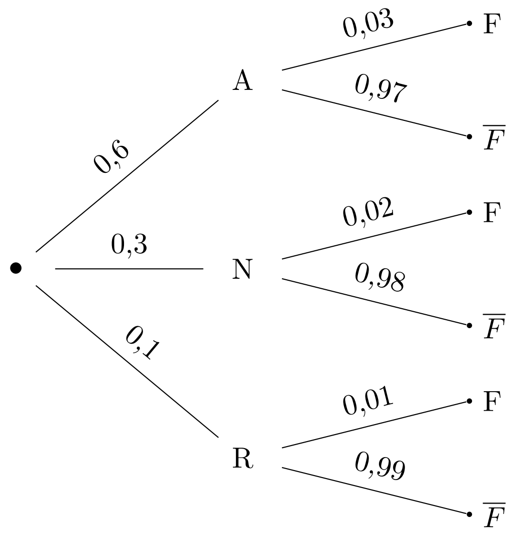
7b) **[1 punto]** Haciendo el producto vectorial del vector director de la recta s, $\vec{v}_s$, y el normal al plano π, $\vec{n}$, se obtiene el vector director de la recta buscada, r, ya que será paralelo al plano y perpendicular a s.

$\vec{v}_r = \vec{v}_s \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$, pasando por el punto $P(1, -1, -8)$ la ecuación continua de la recta buscada es $\dfrac{x - 1}{-1} = \dfrac{y + 1}{2} = \dfrac{z + 8}{5}$ y pasando a implícitas, $\boxed{r \equiv \left\{ \begin{array}{lcl} 2x + y & = & 1 \\ 5x + z & = & -3 \end{array} \right.}$

Explicación: 0,5 *puntos. Cálculo vector director de la recta r:* 0,25 *puntos. Ecuación de la recta* 0,25 *puntos.*

(Alternativa: Calcular el plano paralelo a π que pasa por P y el plano perpendicular a s que pasa por P. La intersección es la recta buscada. Calificación: Explicación 0,5 *puntos. Cálculo de los planos* 0,25 *puntos. Solución final* 0,25 *puntos).*

8a) La probabilidad de que un aviso recibido en una centralita sea clasificado como código amarillo es $P(A) = 0{,}6$, código naranja es $P(N) = 0{,}3$ y código rojo es $P(R) = 0{,}1$. La probabilidad de que sea falsa alarma (F) es respectivamente en cada caso, 0,03, 0,02 y 0,01 y de que no lo sea, $(\overline{F})$, las probabilidades complementarias.



a.1) **[0.5 puntos]** Probabilidad de recibir un falso aviso aplicando el teorema de la probabilidad total (o diagrama de árbol):
$P(F) = P(F/R)P(R) + P(F/N)P(N) + P(F/A)P(A) = 0{,}01 * 0{,}1 + 0{,}02 * 0{,}3 + 0{,}03 * 0{,}6 = \boxed{0{,}025}$.
Explicación y planteamiento: 0,25. Resultado correcto: 0,25 *puntos.*

a.2) **[0.75 puntos]** La probabilidad de que un aviso sea código rojo o naranja si no ha sido falsa alarma y teniendo en cuenta que $P(\overline{F}) = 1 - 0{,}025 = 0{,}975$ es:

$$P((R \cup N)/\overline{F}) = 1 - P(A/\overline{F}) = 1 - \frac{P(A \cap \overline{F})}{P(\overline{F})} = 1 - \frac{0{,}97 * 0{,}6}{0{,}975} = \boxed{0{,}403}.$$

Alternativamente,

$$P((R \cup N)/\overline{F}) = P(R/\overline{F}) + P(N/\overline{F}) = \frac{P(\overline{F}/R)P(R)}{P(\overline{F})} + \frac{P(\overline{F}/N)P(N)}{P(\overline{F})} = \frac{0{,}99 * 0{,}1}{0{,}975} + \frac{0{,}98 * 0{,}3}{0{,}975} = 0{,}1015 + 0{,}3015 = \boxed{0{,}403}.$$

Explicación y planteamiento: 0,5. Resultado correcto: 0,25 *puntos.*

8b) b.1) **[0.5 puntos]** Como $P(N) = 0{,}3$, se trata de una variable aleatoria binomial $X = B(n, p)$, con $n = 9$ y $p = 0{,}3$, luego $P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}0404 + 0{,}1556 + 0{,}2668 = \boxed{0{,}4628}$.
Definición de la variable, planteamiento del problema: 0,25 *puntos. Resolución:* 0,25 *puntos.*

b.2) **[0.75 puntos]** La probabilidad de que sean todos amarillos o naranjas es equivalente a que ninguno sea rojo. Como $P(R) = 0{,}1$ se trata de una variable aleatoria binomial $X = B(n, p)$ con $n = 9$ y $p = 0{,}1$, luego $P(X = 0) = \boxed{0{,}3874}$.

Planteamiento del problema: 0,5 puntos. Obtención del resultado final: 0,25 *puntos.*

(**Observación:** Si del enunciado del problema se interpreta que hay que calcular "La probabilidad de que todos los avisos sean amarillos o todos sean naranjas", también se considerará válida esta opción con los mismos criterios de corrección.

En este caso, hay que calcular $P(\text{"todos A"} \cup \text{"todos N"}) = P(\text{"todos A"}) + P(\text{"todos N"})$.

Considerando X_1 binomial de parámetros $n = 9$ y $p = 0{,}6$, entones $P(\text{"todos A"}) = P(X_1 = 9) = 0{,}0101$. Usando la tabla proporcionada en el examen, esto es equivalente a tomar $\overline{X_1}$ la binomial de parámetros $n = 9$ y $p = 0{,}4$ y calcular $P(\overline{X_1} = 0) = 0{,}0101$.

Considerando X_2 binomial de parámetros $n = 9$ y $p = 0{,}3$, entones $P(\text{"todos N"}) = P(X_2 = 9) = 0$.

En este caso, la solución buscada es $P(\text{"todos A"}) + P(\text{"todos N"}) = \boxed{0{,}0101}$)