Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2022
Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. *Un fabricante comercializa 2 modelos de zapatillas para montaña, uno para mujer que le proporciona un beneficio de 28 euros por par y otro para hombre con un beneficio por cada par de 30 euros. El próximo mes tiene que fabricar entre 100 y 600 pares de zapatillas de hombre y un mínimo de 400 pares de mujer. Además solamente puede fabricar un máximo de 1200 pares de zapatillas.*

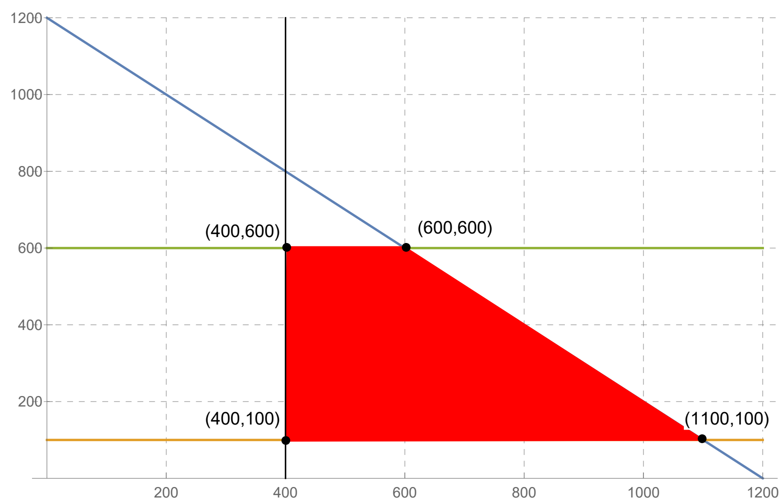
a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)

b) Determina cuántos pares de zapatillas de cada modelo debe fabricar para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

Solución:

a) Llamando x a las zapatillas de mujer e y a las zapatillas de hombre, la función objetivo será: $Z = 28x + 30y$. (0.25 puntos)

Las restricciones del problema son $\begin{cases} x + y \leq 1200 \\ 100 \leq y \leq 600 \\ x \geq 400 \end{cases}$ (0.5 puntos por las restricciones y 0.25 puntos por representar la región factible)



Los vertices de la región factible son: $A = (400, 100)$, $B = (400, 600)$, $C = (600, 600)$, y $D = (1100, 100)$. (0.25 puntos por los vértices)

b) Aplicados los vértices a la función objetivo $Z(A) = 14200$; $Z(B) = 29200$; $Z(C) = 34800$; $Z(D) = 33800$. El máximo beneficio se obtiene fabricando 600 zapatillas de cada tipo con un beneficio de 34800 euros (0.25 puntos por óptimo)

2. *La caja de bombones que compro cuesta 51 euros y contiene 12 bombones de chocolate negro, 6 de chocolate con leche y 6 de chocolate blanco. Cada bombón de chocolate negro cuesta un euro más que los de chocolate con leche y estos últimos cuestan 50 céntimos menos que los de chocolate blanco.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto cuesta cada tipo de bombón. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Solución:

a) Tomando $x \equiv$ precio bombón de chocolate negro; $y \equiv$ precio bombón de chocolate con leche; $z \equiv$ precio bombón de chocolate blanco.

$$\begin{cases} 12x + 6y + 6z = 51 \\ x = y + 1 \\ y = z - 0.5 \end{cases}$$ (0.25 puntos por cada ecuación bien planteada).

b) La solución del sistema es $(x, y, z) = (2.5, 1.5, 2)$ euros. El bombón de chocolate negro cuesta 2.5 euros, el de chocolate con leche 1.5 y el de chocolate blanco 2 euros. (0.5 puntos por el desarrollo de la resolución y 0.25 puntos por la solución correcta)

Bloque 2

1. *Se considera la función* $f(x)=\begin{cases} 2x-4 & si\ x\le c \\ -(x-3)^2+2 & si\ x>c \end{cases}$

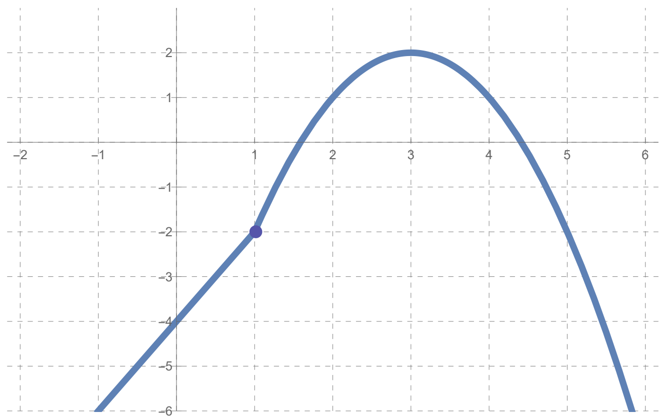
a) ¿Para qué valor de c *la función* $f(x)$ *es continua en* $x=c$*? (0.75 puntos)*

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ *para* $c=1$*. (0.75 puntos)*

Solución:

a) La función es continua en $x=c \Leftrightarrow \lim_{x\to c} f(x)=f(c)$. Para que exista el límite, los límites laterales tienen que ser iguales: $\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c}(2x-4)=2c-4=f(c)$ y $\lim_{x\to c^+} f(x)=\lim_{x\to c}(-(x-3)^2+2)=-(c-3)^2+2=-c^2+6c-7$. $2c-4=-c^2+6c-7\Rightarrow c^2-4c+3=0\Rightarrow c=1$ y $c=3$. (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.5 puntos)

b) (0.25 puntos por cada trozo bien dibujado. Todo correcto 0.75 puntos)



2. *La función* $f(x)=ax^4+bx^2+c$ *tiene un mínimo en el punto* $(-1,0)$ *y corta al eje* OY *en el punto de ordenada* $y=1$*. Con estos datos, halla razonadamente los valores de los parámetros* a*,* b *y* c*. (1.5 puntos)*

Solución:

$f(x)=ax^4+bx^2+c\Rightarrow f'(x)=4ax^3+2bx.$

$$\begin{cases} f(-1)=0 \\ f'(-1)=0 \\ f(0)=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a+b+c=0 \\ -4a-2b=0 \\ c=1 \end{cases}\Rightarrow a=1,\ b=-2\Rightarrow f(x)=x^4-2x^2+1.$$

(0.25 por cada condición. 0.75 por la solución correcta)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. *El 70 % de los turistas que visitan una determinada ciudad se alojan en el centro, y el resto lo hace en las afueras. El 60 % de los que se alojan en el centro y el 40 % de los que se alojan en las afueras lo hacen en hoteles de 3 o más estrellas, mientras que el resto lo hace en establecimientos de menor calidad.*

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que se haya alojado en un hotel de 3 o más estrellas? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que una persona se ha alojado en un establecimiento de menor calidad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona se haya alojado en el centro? (0.75 puntos)

Solución:

$C=$ Centro; $A=$ Afueras; $H=$ Hotel 3 o más estrellas; $H^c=$ No hotel 3 o más estrellas.

$P(C)=0.7$; $P(A)=0.3$; $P(H\mid C)=0.6$; $P(H\mid A)=0.4$; $P(H^c\mid C)=0.4$; $P(H^c\mid A)=0.6$.

a) $P(H)=P(C)\cdot P(H\mid C)+P(A)\cdot P(H\mid A)=0.7\cdot 0.6+0.3\cdot 0.4=0.54$. (0.75 puntos)

b) $P(C\mid H^c)=\frac{P(C\cap H^c)}{P(H^c)}=\frac{P(C)\cdot P(H^c|C)}{P(H^c)}=\frac{0.7\cdot 0.4}{1-0.54}=\frac{0.28}{0.46}=0.609$. (0.75 puntos)

4. *El número de pacientes que se atienden en un centro de salud a la semana sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 50$ pacientes. Se ha tomado una muestra aleatoria de 25 semanas y se ha registrado el número de pacientes atendidos, proporcionando una media de 322 pacientes.*

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de pacientes atendidos con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) Explica razonadamente qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)

c) ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de pacientes atendidos a la semana es de 330 con un nivel de confianza del 99 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) Del enunciado se deduce: $\bar{X} = 322$ pacientes, $\sigma = 50$ pacientes, $n = 25$, $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ (0.25 puntos)

$\text{IC} = \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (0.25 puntos)

$\text{IC} = \left(322 - 1.96\frac{50}{\sqrt{25}},\ 322 + 1.96\frac{50}{\sqrt{25}}\right) = (302.4,\ 341.6)$ (0.5 puntos)

b) Al aumentar el tamaño de muestra, disminuye el valor de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y por tanto disminuirá la amplitud del intervalo. (0.5 puntos)

c) El valor de 330 pacientes está en el intervalo calculado al 95 %, como al aumentar el nivel de confianza aumenta la amplitud del intervalo, el valor de 330 pacientes también estará en el IC al 99 % y por lo tanto se puede aceptar la afirmación. (0.5 puntos)

Bloque 2

3. *En un programa de televisión hay tres secciones: magia, humor y noticias. La sección de humor dura cinco minutos más que la de magia. El tiempo ocupado por la magia y el humor es en total la cuarta parte del dedicado a noticias y la duración total de programa es de 1 hora y 55 minutos.*

a) Plantea el sistema de ecuaciones que nos permita averiguar cuánto tiempo se dedica a cada una de las tres secciones del programa. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Solución:

a) Tomando $x \equiv$ tiempo sección de magia; $y \equiv$ tiempo sección de humor; $z \equiv$ tiempo sección de noticias.

$$\left\{\begin{array}{c} x + 5 = y \\ x + y = \frac{1}{4}z \\ x + y + z = 115 \end{array}\right. \qquad \text{(0.25 puntos por cada ecuación bien planteada).}$$

b) La solución del sistema es $(x, y, z) = (9, 14, 92)$ minutos. La sección de magia dura 9 minutos, la de humor 14 minutos y la de noticias 92 minutos (0.5 puntos por el desarrollo de la resolución y 0.25 puntos por la solución correcta).

4. *a) Dadas dos matrices cuadradas A y B, razona si se obtendría el mismo resultado en la resolución de las ecuaciones $A \cdot X = B$ y $B = X \cdot A$? ¿De qué propiedad estamos hablando? (0.5 puntos)*

b) Si la dimensión de la matriz M es $3 \times m$, la dimensión de la matriz N es 2×5 y P es una matriz cuadrada de orden p. ¿Qué valores han de tomar m y p para que se pueda realizar el producto $M \cdot N \cdot P$? ¿Qué dimensión tendría la matriz resultante? (0.5 puntos).

c) Para las matrices $C = \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $E = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}$ resuelve la ecuación $X \cdot C - D^2 = \frac{1}{3}E^T$ (1 punto)

Solución:

a) Las ecuaciones despejadas nos dan: $X = A^{-1} \cdot B$ y $X = B \cdot A^{-1}$ y el resultado no sería el mismo ya que en una multiplicamos por la izquierda y en la otra por la derecha y la propiedad conmutativa en general no se cumple. (0.5 puntos)

b) Para poder multiplicar $M \cdot N$ el número de columnas de M debe ser igual que el número de filas de N, luego $m = 2$. Por la misma razón la matriz P ha de ser de orden $p = 5$ (0.25 puntos). La matriz resultante tendrá $\dim = 3 \times 5$. (0.25 puntos)

c) $X \cdot C - D^2 = \frac{1}{3}E^T \Rightarrow X \cdot C = \frac{1}{3}E^T + D^2 \Rightarrow X = \left[\frac{1}{3}E^T + D^2\right] \cdot C^{-1}$.

$$X = \left[\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^2\right] \cdot \begin{pmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} 28 & -3 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -11 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -81 & -296 \\ 19 & 68 \end{pmatrix}$ (0.5 puntos la matriz inversa. Todo correcto 1 punto)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. *El 40 % de las personas que acuden a una consulta médica lo hacen para diagnosticar una enfermedad, el 30 % para solicitar recetas y un 10 % para ambas cosas, diagnosticar enfermedad y solicitar recetas.*

a) Elegida una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que acuda a solicitar recetas o a diagnosticar una enfermedad o ambos? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que una persona ha acudido a diagnosticar una enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que esta persona también solicite recetas? (0.75 puntos)

Solución:

$D =$ Diagnóstico; $R =$ Recetas; $P(D) = 0.4$; $P(R) = 0.3$; $P(D \cap R) = 0.1$.

a) $P(D \cup R) = P(D) + P(R) - P(R \cap D) = 0.4 + 0.3 - 0.1 = 0.6$. (0.75 puntos)

b) $P(R \mid D) = \frac{P(D \cap R)}{P(D)} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$. (0.75 puntos)

6. *El número de libros que lee un estudiante de Bachillerato al año sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 6$ libros^2. Se ha tomado una muestra de 10 estudiantes de Bachillerato y el número de libros que han leído han sido 4, 8, 2, 9, 3, 7, 5, 6, 7 y 4 libros.*

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de libros leídos con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)

b) Explica razonadamente qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 64 estudiantes y un nivel de confianza del 95.96 %? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:

a) La media muestral es: $\bar{X} = \frac{4+8+2+9+3+7+5+6+7+4}{10} = 5.5$ libros.

Del enunciado se deduce: $\sigma^2 = 6$ libros$^2 \Rightarrow \sigma = 2.45$ libros, $n = 10$, $1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$. (0.25 puntos)

$\text{IC} = \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (0.25 puntos)

$\text{IC} = \left(5.5 - 2.17\frac{2.45}{\sqrt{10}},\ 5.5 + 2.17\frac{2.45}{\sqrt{10}}\right) = (3.819,\ 7.181)$. (0.5 puntos)

b) Para aumentar la amplitud del intervalo manteniendo el nivel de confianza, hay que aumentar el valor de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y como σ es un valor dado, la única opción es disminuir el tamaño de muestra. (0.5 puntos)

c) $1 - \alpha = 0.9596 \Rightarrow \alpha = 0.0404 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0202 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.05$. (0.25 puntos)

Error máximo admisible $E = Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.05\frac{2.45}{\sqrt{64}} = 0.628$. (0.25 puntos)

Bloque 2

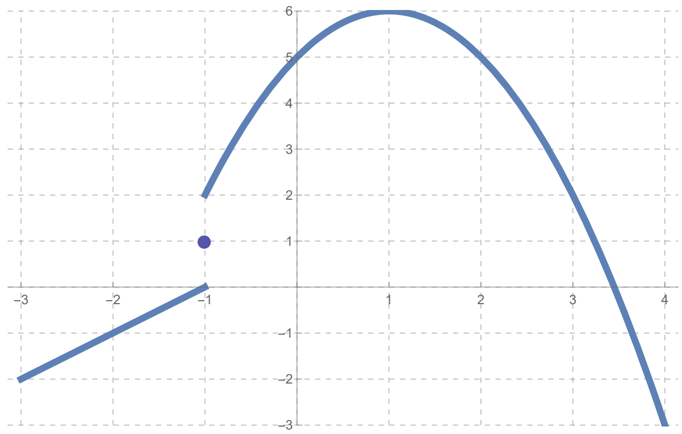
5. *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} (x+t+1)^2 & si\ x < -1 \\ 1 & si\ x = -1 \\ -x^2 + (t+2)x + 5 & si\ x > -1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua $x = -1$? (0.5 puntos)

b) Para $t = 0$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-1, \infty)$. (0.5 puntos)

c) Para $t = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-1, \infty)$. (0.5 puntos)

Solución:



a) La función es continua en $x = -1 \Leftrightarrow \lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$. Para que exista el límite, los límites laterales tienen que ser iguales:

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1}(x+t+1)^2 = t^2$ y $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1}(-x^2+(t+2)x+5) = -t+2$.

$t^2 = -t+2 \Rightarrow t^2+t-2 = 0 \Rightarrow t = -2$ y $t = 1$. Como $f(-1) = 1 \Rightarrow t = 1$. (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.25 puntos)

b) Los extremos relativos verifican $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = -2x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Se evalúa el valor obtenido en $f^{''}(x) = -2$ para determinar si el puntos encontrado es máximo o mínimo, $f^{''}(1) = -2 < 0 \Rightarrow$ máximo relativo en $(1,6)$. (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.25 puntos)

c) $f^{'}(x) > 0$ en el intervalo $(-1,1)$ por lo que la función crece y $f^{'}(x) < 0$ en el intervalo $(1,\infty)$ donde decrece. (0.25 por cada intervalo correcto)

6. *El número de socios de una protectora de animales durante los cinco primeros años de su existencia viene dado por la siguiente función $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ con $x =$ años y $1 \leq x \leq 5$.*

a) ¿En qué intervalos aumenta el número de socios? ¿Y en cuáles disminuye? (0.5 puntos)

b) ¿Cuándo hay mayor número de socios y cuántos son? (0.75 puntos)

c) ¿En qué año son menos socios y cuántos hay? (0.75 puntos)

Solución:

a) $P^{'}(x) = 3x^2 - 12x + 9$ y $P^{'}(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ y $x = 3$. Decrece en $(1,3)$ ya que $P^{'}(x) < 0$ en este intervalo (0.25 puntos) y crece en $(3,5)$ ya que $P^{'}(x) > 0$. (0.25 puntos)

b) $P^{''}(x) = 6x - 12$ y $P^{''}(1) = -6 < 0 \Rightarrow$ máximo relativo con $P(1) = 1^3 - 6\cdot 1^2 + 9\cdot 1 + 4 = 8$. Hay que comprobar el otro extremo del intervalo $P(5) = 5^3 - 6\cdot 5^2 + 9\cdot 5 + 4 = 24$. Máximo el quinto año con 24 socios. (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.5 puntos)

c) $P^{''}(3) = 6 > 0 \Rightarrow$ mínimo relativo con $P(3) = 3^3 - 6\cdot 3^2 + 9\cdot 3 + 4 = 4$. Mínimo el tercer año con 4 socios. (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.5 puntos)