Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2021/2022

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. *a*) **[1,5 puntos]** Encuentra todas las matrices X que conmutan con la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

es decir, que verifican que $AX = XA$.

b) **[1 punto]** ¿Existe alguna matriz simétrica que conmute con A y cuyo determinante valga 4?

Solución:

a) Sea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, se ha de cumplir que $AX = XA$, es decir:

$$\begin{pmatrix} 2\,a & 2\,b \\ a-c & b-d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b+2\,a & -b \\ d+2\,c & -d \end{pmatrix}.$$

Esto da lugar al siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcl} 2a & = & b+2a \\ 2b & = & -b \\ a-c & = & d+2c \\ b-d & = & -d \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{rcl} b & = & 0 \\ b & = & 0 \\ a-3c-d & = & 0 \\ b & = & 0 \end{array}$$

Por tanto, se ha de cumplir que $b = 0$ y $a - 3c - d = 0$. Por tanto, tenemos que $b = 0$ y a, c y d son solución de un sistema de tres variables con una ecuación, por lo que es un sistema compatible indeterminado (y no existe solución única). Cualquier matriz X que cumpla estas dos condiciones verifica que XA = AX.

Criterios de corrección:

- Plantear el sistema del problema correctamente (ya sea igualando dos matrices 2×2 o escribiendo las 4 ecuaciones por separado), 1,25 puntos; obtener las dos condiciones, 0,25 puntos. Basta con obtener las dos condiciones $b = 0$ y $a - 3c - d = 0$ sin necesidad de resolver este sistema.

b) Si X es simétrica entonces $b = c$. Por tanto, $b = c = 0$ y $a - d = 0$, es decir $a = d$. Por tanto, $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Como el determinante de X es a^2 y tiene que ser 4, tenemos que las soluciones para a son $a = 2$ y $a = -2$ (con dar una de ellas sería suficiente).

Criterios de corrección:

- Poner la condición de simetría, 0,75 puntos; calcular el determinante y obtener la solución, 0,25 puntos.

2. *a*) **[1,5 puntos]** Tres lápices, un cuaderno y una agenda han costado 5 euros, lo mismo que dos cuadernos y una agenda. ¿Podemos saber el precio de cada artículo si ninguno es gratis y en céntimos todos son múltiplos de 50?

b) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}.$$

Solución:

a) Sea L el precio en euros de un lápiz, C el de un cuaderno y A el de la agenda. El enunciado nos dice que:

$$\begin{aligned} 3L + C + A &= 5 \\ 2C + A &= 5 \end{aligned}$$

Es un sistema compatible indeterminado. Se resuelve (en función de C, por ejemplo) y tenemos:

$$\begin{aligned} C &= C \\ A &= 5 - 2C \\ L &= (5 - A - C)/3 = (5 - (5 - 2C) - C)/3 = C/3 \end{aligned}$$

Todos estos valores tienen que ser positivos. Entonces, $A = 5 - 2C > 0$, luego $C < 2{,}5$. Como $L = C/3$ tiene que ser múltiplo de 0,50 euros. Entonces, C tiene que ser 1,5 porque es la única solución. Por tanto, $L = 1{,}50/3 = 0{,}50$ y $A = 5 - 2 \cdot 1{,}5 = 5 - 3 = 2$.

Criterios de corrección:

- Plantear el sistema de dos ecuaciones, 1,25 puntos; obtener C, A, y L, 0,25 puntos.

b) Este límite es indeterminado del tipo $1^{+\infty}$. Se puede resolver, por ejemplo, de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{\frac{x^2+1}{x}} = \exp\left(\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+1}{x}-1)\frac{x^2+1}{x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to+\infty}(\frac{x+1-x}{x})\frac{x^2+1}{x}\right) =$$

$$\exp\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}\right) = \exp(1) = e.$$

Criterios de corrección:

- Indicar el tipo de indeterminación, 0,25 puntos; plantear la resolución, 0,5 puntos; dar la solución correcta, 0,25 puntos. Este límite se puede resolver de otras maneras y estos métodos de resolución, evidentemente, se darán como correctos.

3. *a*) Sea la curva $f(x) = a - x^2$.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué valores puede tomar $a \in \mathbb{R}$ para que la curva $f(x) = a - x^2$ corte al eje de abscisas (eje OX) en dos puntos y, por tanto, delimite con dicho eje un recinto cerrado?

a.2) **[1 punto]** Encuentra razonadamente $a \in \mathbb{R}$ para que el área de dicho recinto valga 36.

b) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}dx.$$

El cambio de variable $t = 1 + 3x^2$ te puede ayudar.

Solución:

a) a.1) Para que $f(x)$ corte al eje OX se tiene que cumplir que $f(x) = a - x^2 = 0$. Esto se cumple si $x = \pm\sqrt{a} = \pm a^{1/2}$. Para que la solución exista y el corte sea en dos puntos se tiene que dar que $a > 0$.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema y encontrar los valores de a, 0,5 puntos.

a.2) Para un $a > 0$ el área es

$$\int_{-a^{1/2}}^{+a^{1/2}} (a - x^2)dx = [ax - x^3/3]_{-a^{1/2}}^{a^{1/2}} = a \cdot a^{1/2} - a^{3/2}/3 - (-a \cdot a^{1/2} + a^{3/2}/3) =$$

$$2(a \cdot a^{1/2} - a^{3/2}/3) = 2(a^{3/2} - a^{3/2}/3) = (4/3)a^{3/2}.$$

Para que la integral valga 36 se ha de cumplir que $(4/3)a^{3/2} = 36$, es decir, $a = 9$.

Criterios de corrección:

- Plantear la integral, 0,75 puntos; hallar el valor de a, 0,25 puntos.

b) Del cambio de variable tenemos que $dt = 6xdx$. Por tanto, la integral quedaría:

$$\int \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}}dx = \int \frac{1/3}{t^{1/2}}dt = \frac{2}{3}t^{1/2} + C = \frac{2}{3}(1+3x^2)^{1/2} + C$$

Criterios de corrección:

- Hacer el cambio de variable, 0,5 puntos; resolver la integral; 0,5 puntos. Si se utiliza otro cambio de variable para resolver la integral correctamente, se dará también por correcta la respuesta.

4. Sean las rectas

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2\lambda \\ y & = & -\lambda \\ z & = & a \end{array} \right. , \; s \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -1 \\ y & = & \mu \\ z & = & -5\mu \end{array} \right. ,$$

donde λ y μ son los parámetros y $a \in \mathbb{R}$.

a) **[1,5 puntos]** Estudia su posición relativa en función de los valores que toma a.

b) **[1 punto]** Encuentra razonadamente un plano que contenga a s y que sea paralelo a r.

Solución:

a) El vector director de r es $\vec{u} = (2, -1, 0)$ y el de s es $\vec{v} = (0, 1, -5)$. Como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, las rectas no son paralelas ni coincidentes. Entones, van a ser secantes o se van a cruzar.

Tomamos un punto de r, $A = (0, 0, a)$, y otro de s, $B = (-1, 0, 0)$, y estudiamos la relación entre los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{AB} = (-1, 0, -a)$. Cuando sean coplanarios las rectas son secantes y en otro caso las rectas se cruzan. Los tres vectores son coplanarios cuando el siguiente determinante es cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -a \end{vmatrix} = -2a - 5.$$

Por tanto, las rectas son secantes cuando $-2a - 5 = 0$, es decir, $a = -5/2$. Para cualquier otro valor de a las rectas se cruzan.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 1 punto; identificar que las rectas no son paralelas, 0,25 puntos; identificar el caso en el que se cortan, 0,25 puntos. La resolución correcta de este problema por otros métodos también se dará por válida.

b) El plano buscado tendrá como vectores directores $\vec{u} = (2, -1, 0)$ y $\vec{v} = (0, 1, -5)$, y pasará por un punto de la recta s (por ejemplo, el punto $B = (-1, 0, 0)$). La ecuación del plano se puede obtener calculado el siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-0 & z-0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

La ecuación del plano es $(x+1)5 + 0 + 2z + 10y = 0$, es decir, $5x + 10y + 2z = -5$.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,75 puntos; obtener la ecuación del plano, 0,25 puntos.

5. a) **[1 punto]** Expresa razonadamente en forma de ecuaciones paramétricas la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x = y + 1$ y $\pi_2 \equiv y + 2z = 5$.

b) **[1,5 puntos]** Enuncia el teorema del valor medio del cálculo integral. Encuentra razonadamente el punto al que hace alusión dicho teorema para la función $f(x) = 3/x^2$ en el intervalo $[1, 3]$. Interpreta geométricamente lo hallado.

Solución:

a) La ecuación de la recta se obtiene al resolver el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Tomando $z = t$ las ecuaciones paramétricas que se piden son $y = 5 - 2z = 5 - 2t$, $x = 1 + y = 1 + 5 - 2t = 6 - 2t$. Las ecuaciones quedarían:

$$\begin{aligned} x &= 6 - 2t \\ y &= 5 - 2t \\ z &= t \end{aligned}.$$

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,75 puntos; obtener las ecuaciones paramétricas, 0,25 puntos.

b) El teorema dice:

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Se trata de encontrar el valor c que cumple lo que enuncia el teorema del valor medio: $c \in (1, 3)$ y $\int_1^3 (3/x^2)dx = (3/c^2)(3 - 1)$.

Para el caso de $f(x) = 3/x^2$ tenemos que

$$\int_1^3 (3/x^2)dx = [-3/x]_1^3 = -1 + 3 = 2.$$

Entonces, $c \in (1, 3)$ y $f(c)(3 - 1) = 2$, es decir, $(3/c^2)2 = 2$. Así, $c = +\sqrt{3}$ porque la solución $c = -\sqrt{3}$ no está en el intervalo.

Criterios de corrección:

- Enunciar el teorema, 1,25 puntos; identificar los elementos del enunciado del teorema y calcular el valor de c, 0,25 puntos.

6. a) **[1,5 puntos]** Estudia el rango de la matriz M en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$, siendo

$$M = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & m \\ 4 & 1 & m & 2 \end{pmatrix}.$$

b) **[1 punto]** Sean los planos $\pi_1 \equiv 2x + my = 1$, $\pi_2 \equiv 2x + y = m$ y $\pi_3 \equiv 4x + y + mz = 2$. Estudia su posición relativa según los valores de m. Puedes utilizar los resultados obtenidos en el apartado anterior.

Solución:

a) Estudiamos el rango del menor que resulta de eliminar la última columna (por ejemplo):

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & m \end{vmatrix} = m(2-2m)$$

Por tanto, si m es distinto de 0 y 1, el rango es 3. Veamos qué pasa en estos casos:

- $m = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de esta matriz es 3 porque

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 - 4 = 2 \neq 0.$$

- $m = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango es 2 porque la primera y la segunda fila son iguales.

Por tanto, el rango de la matriz es 3 salvo para $m = 1$, en cuyo caso el rango es 2.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 1 punto; determinar el rango para $m = 1$, 0,25 puntos; determinar el rango en el resto de casos, 0,25 puntos.

b) Para estudiar la posición relativa hay que estudiar el sistema

$$\begin{aligned} 2x + my &= 1 \\ 2x + y &= m \\ 4x + y + mz &= 2 \end{aligned}$$

Por el resultado anterior, si $m = 1$ el rango es 2 y las ecuaciones de π_1 y π_2 son iguales, y π_3 es secante a los otros dos.

Estudiamos además el rango de la matriz de coeficientes en función de m por si hubiera otro caso particular:

$$M' = \begin{pmatrix} 2 & m & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & m \end{pmatrix}.$$

Tiene rango 3 excepto para $m = 0$ y $m = 1$. Para $m = 0$ el sistema es incompatible y, por tanto, los tres planos se cortan dos a dos según rectas paralelas entre sí (es decir, son las paredes de un prisma triangular).

Para el resto de valores ($m \neq 0$ y $m \neq 1$) los tres planos se cortan en un punto.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,75 puntos; determinar los distintos casos en función de m, 0,25 puntos.

7. *a*) **[1,25 puntos]** Sean los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (1,0,1)$. Calcula el plano que pasa por el punto $A = (0,0,1)$ y con vector normal el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) El EVAU club de fútbol tiene una probabilidad del 90 % de ganar un partido cuando juega Benceno (su delantero estrella) y del 60 % cuando no lo hace. Se sabe que la probabilidad de que Benceno juegue un partido es del 80 %.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el EVAU C.F. gane un partido cualquiera?

b.2) **[0,75 puntos]** Si el EVAU C.F. acaba de ganar un partido, ¿cuál es la probabilidad de que Benceno haya jugado?

Solución:

a) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\vec{u} \times \vec{v} = (1, 0, -1)$. El plano queda $x - z = C$, donde $C \in \mathbb{R}$. Como el punto $A = (0, 0, 1)$ está cotenido en el plano tenemos que $0 - 1 = C$. Por tanto, la ecuación del plano es $x - z = -1$.

Criterios de corrección:

- Calcular el producto vectorial, 0,75 puntos; obtener la ecuación del plano, 0,5 puntos.

b) Sea $P(B) = 0{,}8$ la probabilidad de que juegue Benzeno, sea $P(G|B) = 0{,}90$ la probabilidad de que gane el equipo cuando juega Benzeno y $P(G|\overline{B}) = 0{,}60$ la probabilidad de que gane el equipo cuando no juega Benzeno.

b.1) La probabilidad de que gane el equipo es (usando la regla de la probabilidad total):

$$P(G) = P(B)P(G|B) + (1 - P(B))P(G|\overline{B}) = 0{,}8 \cdot 0{,}9 + (1 - 0{,}8) \cdot 0{,}60 = 0{,}84$$

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,25 puntos; resolver el problema, 0,25 puntos.

b.2) La probabilidad que se pide es (usando el teorema de Bayes):

$$P(B \mid G) = \frac{P(B \cap G)}{P(G)} = \frac{P(G \mid B)P(B)}{P(G)} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}9}{0{,}84} = 0{,}8571$$

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; resolver el problema, 0,25 puntos.

8. *a*) Se calcula que una quinta parte de los niños españoles presentan algún tipo de intolerancia alimentaria. En una cantina escolar los niños se sientan al azar en mesas de 4 comensales.

a.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que en una mesa haya algún niño con intolerancia alimentaria?

a.2) **[0,75 puntos]** Cuando en una mesa hay algún niño con intolerancia alimentaria, a esa mesa se le sirve el pan sin gluten. Si un día hay ocupadas 8 mesas, ¿cuál es la probabilidad de que haya que servir pan sin gluten en alguna mesa?

b) El peso de los paquetes de 1 kg arroz que comercializa determinada marca siguen una distribución normal de 985 g de media y 25 g de desviación típica.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuántos pesarán más de un kilo?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuánto pesará el más ligero del 70 % de los que más pesan?

a	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
0.10	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.20	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.30	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.40	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549

Solución:

a) a.1) La probabilidad de que un niño tenga alguna intolerancia alimentaria es de $1/5$ y de que no la tenga es $4/5$. La probabilidad de que haya al menos un niño con intolerancia alimentaria en una mesa es 1 menos la probabilidad de que no haya ninguno. La probabilidad de que ninguno de esos 4 niños tenga intolerancia alimentaria es $(4/5)^4$. Por tanto, la probabilidad de que haya al menos un niño con intolerancia alimentaria es $1 - (4/5)^4 = 0{,}5904$.

Aunque no es necesario, este problema se puede plantear usando la distribución binomial. Sea X el número de niños con intolerancia alimentaria en una mesa de 4 comensales. La distribución de X es binomial con $n = 4$ y $p = 1/5$ y la probabilidad que se pide es $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.

Criterios de corrección:

- Plantear y resolver el problema, 0,5 puntos. Si el problema se plantea como una binomial, se dará por correcto si se plantea el cálculo de la probabilidad aunque no se calcule numéricamente puesto que no se ha proporcionado la tabla correspondiente.

a.2) La probabilidad de servir pan sin gluten es una mesa es 0,5904 y la de no servirlo es $1 - 0{,}5904 = 0{,}4096$. La probabilidad de servir pan sin gluten en alguna mesa de esas 8 es 1 menos la probabilidad de no servirla en ninguna. La probabilidad de no servir pan sin gluten en ninguna de las 8 mesas es $0{,}4096^8$. Por tanto, la probabilidad que se pide es $1 - 0{,}4096^8 = 0{,}9992$.

Aunque no es necesario, este problema se puede plantear usando la distribución binomial. Sea X el número de mesas en las que se sirve pan sin gluten. La distribución de X es binomial con $n = 8$ y $p = 0{,}5904$ (obtenida en el apartado anterior) y la probabilidad que se pide es $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.

Criterios de corrección:

- Plantear y resolver el problema, 0,75 puntos. Si la probabilidad del apartado anterior no se ha calculado correctamente, se corregirá el ejercicio como si fuera correcta. Si el problema se plantea como una binomial, se dará por correcto si se plantea el cálculo de la probabilidad aunque no se calcule numéricamente puesto que no se ha proporcionado la tabla correspondiente.

b) Sea X la variable aleatoria que representa el peso de un paquete de arroz.

b.1) La proporción de paquetes que pesan más de un kilo es

$$P(X > 1000) = P(\frac{X - 985}{25} > \frac{1000 - 985}{25}) = P(Z > 0{,}6) = 1 - P(Z \leq 0{,}6) = 1 - 0{,}7257 = 0{,}2743.$$

Por tanto, la respuesta a cuántos pesarán más de un kilogramo sería el 27,43 % del total comercializados.

Criterios de corrección:

- Plantear y resolver el problema, 0,5 puntos.

b.2) Sea q el peso del más ligero del 70 % que más pesa. Se cumple que

$$P(X > q) = 0{,}7;\ P(\frac{X - 985}{25} > \frac{q - 985}{25}) = 0{,}7;\ P(Z > \frac{q - 985}{25}) = P(Z < -\frac{q - 985}{25}) = 0{,}7$$

Mirando en la tabla, el valor $(-q + 985)/25$ tiene que ser, aproximadamente, 0,52 (o 0,53), es decir, $q = -0{,}52 * 25 + 985 = 972$ (o $q = -0{,}53 * 25 + 985 = 971{,}75$).

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener el valor de q, 0,25 puntos.