Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2022/2023

CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Sea el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & y & - & z & = & -1 \\ -x & + & a\cdot y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & a\cdot z & = & 3 \end{array}\right.$, con $a \in \mathbb{R}$.

   a) **[1,75 punto]** Discute cómo es el sistema en función de los valores del parámetro a.

   b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

   Solución:

   a) Sean las matrices $M = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}$ y $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$. Para estudiar cómo es el sistema en función de a tenemos que estudiar su rango.
   Como $|A| = -2a^2 + 3a + 5$, éste se anula para $a = -1$ y $a = 5/2$. Estudiemos el rango de M para cada uno de estos casos.

   - $a = -1$: El rango de M es 3, por lo que tenemos un sistema incompatible.
   - $a = 5/2$: El rango de M es 3, por lo que tenemos un sistema incompatible.

   Para el resto de valores de a, tanto el rango de A como el de M es tres y, por tanto, el sistema es compatible determinado.

   Criterios de corrección:

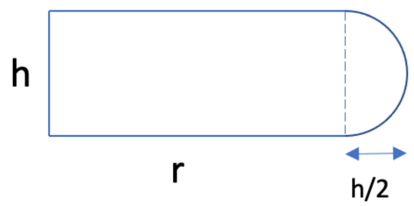
   - Cálculo del determinante de A y de los valores de a para los que se anula, 0,5 puntos; cálculo del rango de A y M cuando $a = -1$, 0,25 puntos; discusión razonada de este caso, 0,25 puntos; cálculo del rango de A y M cuando $a = 5/2$, 0,25 puntos; discusión razonada de este caso, 0,25 puntos; discusión razonada del resto de casos, 0,25 puntos. Si se equivoca al calcular el determinante no tenerlo en cuenta y valorar el resto.

   b) En este caso tenemos un sistema compatible determinado y la solución es $x = 0$, $y = 1/3$, $z = 4/3$.

   Criterios de corrección:

   - Plantear el método de resolución, 0,5 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

2. Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados $h, r \in \mathbb{R}$, de manera que el radio del semicírculo es $h/2$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento. La empresa desea construir un aparcamiento con el mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



a) **[1 punto]** Escribe el área del aparcamiento en función del valor h.

b) **[1,5 puntos]** ¿Cuánto deben valer h y r para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?

Solución:

a) El perímetro es $P(h,r) = h+2r+2\pi(h/2)/2 = h+2r+\pi(h/2)$ por ser el radio de la semicircunferencia igual a $h/2$. Además, este perímetro ha de ser igual a 80. El área es $A(h,r) = h \cdot r + \pi(h/2)^2/2) = h \cdot r + \pi h^2/8$. Despejamos el valor de r de la ecuación del perímetro: $r = (80 - h(1+\pi/2))/2$. Sustituimos este valor de r en la ecuación del área y obtenemos:

$$A(h) = h \cdot \left(40 - h\frac{1+\pi/2}{2}\right) + \pi h^2/8 = h^2(\pi/8 - \frac{1+\pi/2}{2}) + 40h.$$

Criterios de corrección:

- Dar la ecuación del perímetro, 0,25 puntos; dar la ecuación del área, 0,25 puntos; despejar el valor de r de la ecuación del perímetro, 0,25 puntos; dar el área en función de h correctamente, 0,25 puntos.

b) En este caso, tenemos que encontrar el valor de h que maximiza el área. Para ello, obtendremos la derivada de $A(h)$: $A'(h) = 40 + 2 \cdot h(\pi/8 - \frac{1+\pi/2}{2})$. Se anula para $h = -40/\left(2(\pi/8 - \frac{1+\pi/2}{2}\right) \simeq 22{,}40$. Como $A'' = 2(\pi/8 - \frac{1+\pi/2}{2}) \simeq -1{,}785 < 0$, entonces se trata de un máximo. El valor para el radio es $r \simeq 11{,}21$.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema de optimización, 0,5 puntos; calcular la derivada del área, 0,25 puntos; obtener el valor de h, 0,25 puntos; calcular la derivada segunda del área y comprobar que se trata de un máximo, 0,25; obtener el valor de r, 0,25 puntos.

3. *a*) Tenemos dos urnas con bolas. La urna A tiene 6 bolas rojas y 8 negras y la urna B tiene 8 bolas rojas y 10 bolas negras. Disponemos de un dado de 12 caras numeradas del 1 al 12. Lanzamos el dado y si sale un número múltiplo de 4 se extrae una bola de la urna A. Si sale otro número se extrae una bola de la urna B. Calcula razonadamente:

   a.1) **[0,5 puntos]** La probabilidad de obtener una bola roja.

   a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que la bola extraída es roja, la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A.

   b) Una empresa de mensajería sabe que la probabilidad de que el destinatario esté ausente (y no se pueda hacer la entrega) durante el reparto es del 25 %. Un repartidor de esta empresa ha de entregar 6 paquetes.

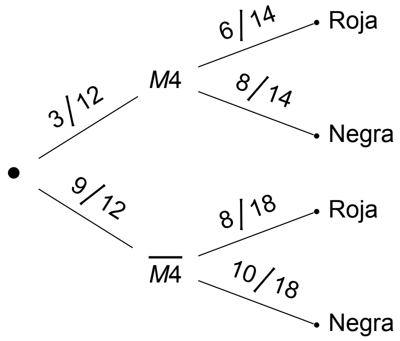
   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que no pueda entregar uno de ellos porque el destinatario esté ausente?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que pueda entregar al menos uno de los paquetes?

n	k \ p	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
6	0	0.7351	0.3771	0.1780	0.0754	0.0277	0.0083	0.0018	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.2321	0.3993	0.3560	0.2437	0.1359	0.0609	0.0205	0.0044	0.0004	0.0000
	2	0.0305	0.1762	0.2966	0.3280	0.2780	0.1861	0.0951	0.0330	0.0055	0.0001
	3	0.0021	0.0415	0.1318	0.2355	0.3032	0.3032	0.2355	0.1318	0.0415	0.0021
	4	0.0001	0.0055	0.0330	0.0951	0.1861	0.2780	0.3280	0.2966	0.1762	0.0305
	5	0.0000	0.0004	0.0044	0.0205	0.0609	0.1359	0.2437	0.3560	0.3993	0.2321
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0018	0.0083	0.0277	0.0754	0.1780	0.3771	0.7351

Solución:

a) Sea $M4$ el suceso que representa sacar un múltiplo de 4 en la tirada de dado y $\overline{M4}$ su complementario. El suceso A representa sacar una bola de la urna A y el suceso B sacar una bola de la urna B. Claramente, $P(M4) = P(A)$ y $P(\overline{M4}) = P(B)$. Las probabilidades de este experimento aleatorio vienen dadas por:



1) $P(Roja) = P(Roja \cap M4) + P(Roja \cap \overline{M4}) = (3/12)(6/14) + (9/12)(8/18) = 3/28 + 1/3 = 9/84 + 28/84 = 37/84 \simeq 0{,}44$.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,25 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

2) Utilizando la regla de Bayes:

$$P(A \mid Roja) = \frac{P(A \cap Roja)}{P(Roja)} = \frac{3/28}{37/84} = \frac{252}{1036} \simeq 0{,}24.$$

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

b) Sea X la variable aleatoria que representa el número de paquetes que no se han podido entregar. Se trata de una binomial con $p = 0{,}25$ y $n = 6$.

1) Se pide $P(X = 1) = 0{,}3560$.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,25 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

2) Que se pueda entregar al menos uno de los paquetes es equivalente a que no se puedan entregar 5 o menos paquetes, es decir, $P(X \leq 5) = 1 - P(X = 6) = 1 - 0{,}0002 = 0{,}9998$.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

4. Sean el plano $\pi \equiv a \cdot x + y - z = 1$, con $a \in \mathbb{R}$, y los puntos $A(1, 0, 0)$ y $B(b, 1, -1)$, con $b \in \mathbb{R}$.

a) **[1,5 puntos]** Determina el valor de a, b para que el vector $\vec{AB}$ sea perpendicular al plano π y el punto A esté contenido en el plano π.

b) **[1 puntos]** Con los valores de a, b obtenidos en el apartado anterior, escribe la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano π.

Solución:

a) El vector $\vec{AB}$ es $(b - 1, 1, -1)$. Para que este vector sea perpendicular al planto π se tiene que cumplir que sea paralelo al vector normal del plano $(a, 1, -1)$. En este caso particular, esto se cumple solamente cuando $b - 1 = a$. La otra condición implica que el punto A cumple la ecuación del plano, es decir, $a \cdot 1 + 0 - 0 = 1$, es decir, $a = 1$. Por tanto, $b - 1 = 1$, es decir, $b = 2$.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener las ecuaciones correctamente, 0,5 puntos; obtener los valores de a y b, 0,5 puntos.

b) El vector director de la recta es el vector normal al plano π: $(1, 1, -1)$. Por tanto, la ecuación que se pide es

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1, 1, -1), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Criterios de corrección:

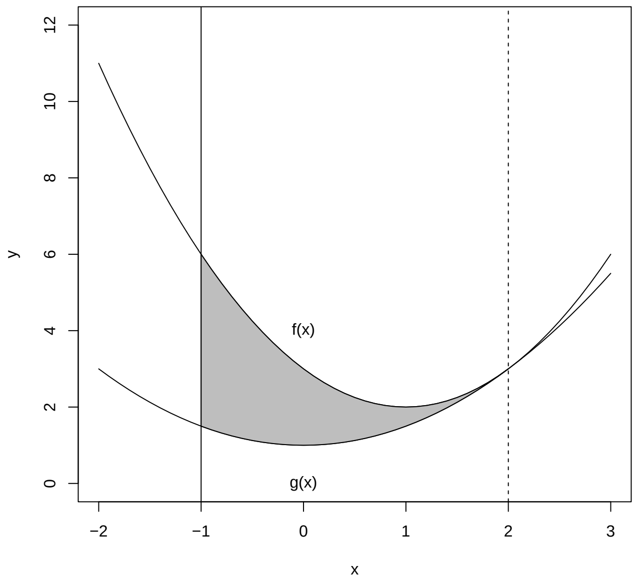
- Plantear la ecuación de la recta, 0,5 puntos; escribir la ecuación de la recta correctamente, 0,5 puntos. Si los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior son incorrectos corregir este apartado como si fueran correctos.

5. *a*) **[1 punto]** Encontrar el área encerrada por la recta $x = -1$ y las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

   b) **[1,5 puntos]** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}$. Estudia el rango de A en función de los valores de a.

Solución:

a) El área que se pide es



Las gráficas de estas funciones se cortan cuando $x = 2$, por tanto el área es

$$\int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{2} (x^2 - 2x + 3 - (\frac{1}{2}x^2 + 1))dx = 9/2.$$

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener el punto de intersección entre $f(x)$ y $g(x)$, 0,25 puntos; obtener el valor correcto del área, 0,25 puntos.

b) El determinante de A es $|A| = -a^2 + 1$. Este determinante se anula para $a = 1$ y $a = -1$. Como además, $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ sabemos que el rango de A va a ser al menos 2.

Por tanto, para $a = \pm 1$ el rango será 2 y para el resto de casos el rango será 3.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener y discutir para los valores de a que anulan el determinante de A, 0,5 puntos; discutir para el resto de valores de a, 0,5 puntos.

6. *a*) **[1 punto]** Calcula el límite siguiente:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 9}{3x - 9}.$$

b) **[1,5 puntos]** Sean el punto $A(1,2,1)$ y el plano $\pi \equiv x - y = 1$. Calcula la distancia del punto A al plano π.

Solución:

a) El límite es del tipo $0/0$. Como el 3 es raíz del numerador y denominadorar podemos escribir el límite así:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 9}{3x - 9} = \lim_{x\to 3} \frac{(x^2+3)(x-3)}{3(x-3)} = \frac{9+3}{3} = 4.$$

Criterios de corrección:

- Plantear el problema y determinar el tipo de indeterminación, 0,5 puntos; plantear la resolución del límite, 0,25 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

b) La distancia es

$$d(A,\pi) = \frac{|1-2-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Criterios de corrección:

- Plantear el problema y escribir la fórmula de la distancia, 0,5 puntos; calcular el numerador, 0,25 puntos; calcular el denominador, 0,25 puntos; obtener el valor correcto de la distancia, 0,5 puntos.

7. *a*) **[1 punto]** Resuelve la siguiente integral:

$$\int (x+3)e^{-2x}dx.$$

b) En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación de $n \in \mathbb{N}$?

Solución:

a) Se trata de una integral que se resuelve por partes tomando $u = x + 3$ y $dv = e^{-2x}dx$. Entonces, $du = dx$ y $v = (-1/2)e^{-2x}$. Así,

$$\int (x+3)e^{-2x}dx = \frac{-(x+3)}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$

Criterios de corrección:

- Plantear la resolución, 0,5 puntos; realizar la integración por partes, 0,25 puntos; dar la solución correcta, 0,25 puntos.

b) Sea X la variable aleatoria que representa el número de unos obtenidos. En cualquier momento del juego, la probabilidad de obtener un 1 es de $1/6$ y la de obtener otro valor es de $5/6$.

1) Tenemos que $P(X=0) = 5/6$, puesto que se trataría de una situación en la que el jugador no obtiene un 1 en la primera tirada. Las otras dos probabilidades que se piden son:

$$P(X=1) = \frac{1}{6}\frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^1 \frac{5}{6} = \frac{5}{6^{1+1}}.$$

$$P(X=3) = \frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{1}{6}\frac{5}{6} = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \frac{5}{6} = \frac{5}{6^{3+1}}.$$

Criterios de corrección:

- Cada una de las probabilidades que se piden, 0,25 puntos.

2) Se pide $P(X = n)$ con $n \in \mathbb{N}$. Viendo los resultados del apartado anterior, tenemos que

$$P(X = n) = (\frac{1}{6})^n \frac{5}{6} = \frac{5}{6^{n+1}}.$$

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

8. *a*) **[1,25 puntos]** Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$ con $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$. Calcula el valor de $\begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix}$ e indica en cada paso las propiedades que utilizas.

b) **[1,25 puntos]** Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ y $\vec{v} = (3, 2, 3)$.

Solución:

a) Aplicando las propiedades de los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ a & b & c \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1/2 & 3/2 & 5/2 \\ 2 & 6 & 10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} = \frac{4}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + \frac{4}{2}\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 10 \\ x & y & z \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot 6 + 2 \cdot 0 = 12.$$

Criterios de corrección:

- Realizar todas las operaciones intermedias correctamente, 1 punto; obtener la solución correcta, 0,25 puntos.

b) El coseno del ángulo α formado por dos vectores es:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|3 + 2 + 3|}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{3^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{8}{\sqrt{3}\sqrt{22}} = 0{,}98.$$

Entonces, $\alpha = \arccos(0{,}98) = 0{,}20$ radianes $= 11{,}46°$.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema, 0,5 puntos; obtener el producto escalar, 0,25 puntos; calcular la norma de los dos vectores, 0,25 puntos; obtener el ángulo, 0,25 puntos.