Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2023
Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
El examen está compuesto de tres secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y) = -x - 5y + 10$ sujeta a las siguientes restricciones:

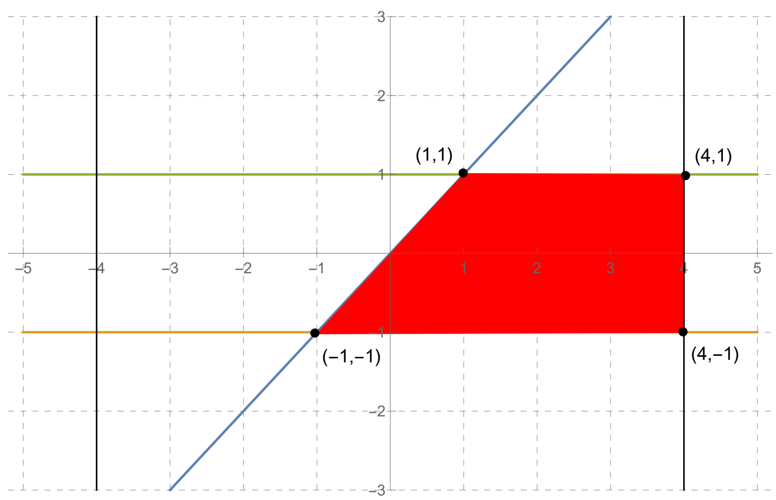
$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

Solución:

a) Los vértices de la región factible son $A = (-1,-1)$, $B = (4,-1)$, $C = (4,1)$, y $D = (1,1)$. (0.25 puntos por determinar los vértices y 0.25 por cada inecuación bien representada. Toda la región factible correcta 1 punto)



b) Aplicados a la función objetivo $f(A) = 16$; $f(B) = 11$; $f(C) = 1$; $f(D) = 4$. Luego el máximo está en el punto $(-1,-1)$ con 16 unidades y el mínimo en $(4,1)$ con 1 unidad. (0.25 puntos)

2. La discografía de un legendario grupo de rock se reedita en tres discos (I, II y III) y las ventas totales ascienden a 70000 unidades. Sabemos que del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos y que la diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de unidades de cada disco se vendieron. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Solución:

a) Tomando $x \equiv$ unidades vendidas del disco I; $y \equiv$ unidades vendidas del disco II; $z \equiv$ unidades vendidas del disco III.

$$\begin{cases} x + y + z = 70000 \\ x + y = z \\ z - y = 3(y - x) \end{cases}$$ (0.25 puntos por cada ecuación bien planteada)

b) La solución del sistema es $(x,y,z) = (15000, 20000, 35000)$ unidades. Se vendieron 15000 unidades del disco I, 20000 del disco II y 35000 del disco III. (0.5 puntos por el desarrollo de la resolución y 0.25 puntos por la solución correcta)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + tx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x + t & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 1$? (0.5 puntos)

b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(-\infty, 1)$. (0.5 puntos)

c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(-\infty, 1)$. (0.5 puntos)

Solución:

a) La función es continua en $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Para que exista el límite, los límites laterales tienen que ser iguales:

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1}(2x^2 + tx - 1) = t + 1 = f(1)$.

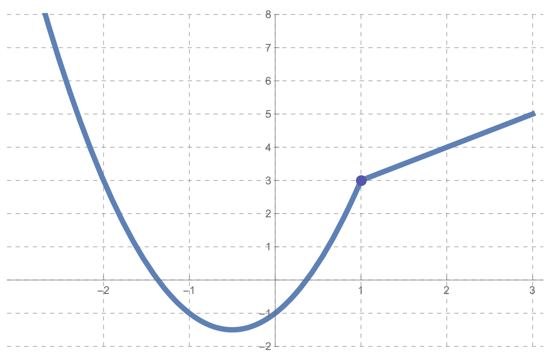
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1}(x + t) = t + 1$.

La función es continua $\forall t \in \mathbb{R}$ (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.25 puntos)

b) Los extremos relativos verifican $f'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$.

$f''(x) = 4 \Rightarrow f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 > 0 \Rightarrow$ mínimo relativo en $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$. (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.25 puntos)

c) $f'(x) < 0$ en el intervalo $(-\infty, -\frac{1}{2})$ por lo que la función decrece y $f'(x) > 0$ en el intervalo $(-\frac{1}{2}, 1)$ donde crece. (0.25 por cada intervalo correcto)



2. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tiene un punto de inflexión en $(2, -5)$ y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es -12. Calcula razonadamente los valores de los parámetros a, b, y c. (1.5 puntos)

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow f''(x) = 6ax + 2b.$$

$$\begin{cases} f(2) = -5 \\ f'(2) = -12 \\ f''(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a + 4b + c = -5 \\ 12a + 4b = -12 \\ 12a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = -6,\ c = 11 \Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 11.$$

(0.25 por cada condición. 0.75 por la solución correcta)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un determinado instituto el $50\,\%$ de los estudiantes prefiere como red social Facebook, pero un $30\,\%$ de estos no publica habitualmente nada. El $35\,\%$ prefiere Instagram, pero solo el $30\,\%$ de los que prefieren esta plataforma hacen publicaciones habitualmente. Finalmente, el resto de los estudiantes prefiere TikTok y un $60\,\%$ de estos no publica habitualmente.

a) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no publique habitualmente nada en su red social preferida? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que un estudiante publica habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que su red social preferida sea Instagram? (0.75 puntos)

Solución:

$F=$ Facebook; $I=$ Instagram; $T=$ TikTok; $p=$ Publica; $p^c=$ No publica.

$P(F)=0.5$; $P(I)=0.35$; $P(T)=0.15$; $P(p\mid F)=0.7$; $P(p\mid I)=0.3$; $P(p\mid T)=0.4$; $P(p^c\mid F)=0.3$; $P(p^c\mid I)=0.7$; $P(p^c\mid T)=0.6$.

a) $P(p^c)=P(F)\cdot P(p^c\mid F)+P(I)\cdot P(p^c\mid I)+P(T)\cdot P(p^c\mid T)=0.5\cdot 0.3+0.35\cdot 0.7+0.15\cdot 0.6=0.485$. (0.75 puntos)

b) $P(I\mid p)=\frac{P(I\cap p)}{P(p)}=\frac{P(I)\cdot P(p|I)}{P(p)}=\frac{0.35\cdot 0.3}{1-0.485}=\frac{0.105}{0.515}=0.2039$. (0.75 puntos)

4. Una asociación benéfica ha tomado una muestra de 9 personas y ha registrado las cantidades donadas por estas personas, obteniendo 60, 40, 55, 35, 20, 25, 50, 45 y 30 euros. Si el dinero donado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2=100$ euros^2,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del dinero donado con un nivel de confianza del $97\,\%$. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:

a) La media muestral es: $\bar{X}=\frac{60+40+55+35+20+25+50+45+30}{9}=40$ euros.

Del enunciado se deduce: $\sigma^2=100$ euros$^2\Rightarrow\sigma=10$ euros, $n=9$, $1-\alpha=0.97\Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}=2.17$. (0.25 puntos)

IC $=\left(\bar{X}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \bar{X}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (0.25 puntos)

IC $=\left(40-2.17\frac{10}{\sqrt{9}},\ 40+2.17\frac{10}{\sqrt{9}}\right)=(32.767,\ 47.233)$. (0.5 puntos)

b) El error máximo admisible viene dado por $E=Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Rightarrow n=\left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}}\sigma}{E}\right)^2$. (0.5 puntos)

Para $E=2\Rightarrow n=\left(\frac{2.17\cdot 10}{2}\right)^2=(10.85)^2=117.723$. El tamaño mínimo de la muestra para que el error de estimación de la media sea inferior a 2 euros, con el mismo nivel de confianza debe ser 118 personas. (0.5 puntos)

Bloque 2

3. Un teatro ha vendido las 660 entradas disponibles que tenía para un espectáculo. El número de entradas que se han vendido para jubilados es la cuarta parte de las entradas que se han vendido para adultos. Además, las entradas para niños equivalen al $10\,\%$ de las que se han vendido entre adultos y jubilados.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cómo se han repartido las entradas entre adultos, jubilados y niños. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Solución:

a) Tomando $x\equiv$ jubilados; $y\equiv$ adultos; $z\equiv$ niños.

$$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=660\\ 4x=y\\ 0.1(x+y)=z\end{array}\right.$$ (0.25 puntos por cada ecuación bien planteada).

b) La solución del sistema es $(x,y,z)=(120,480,60)$ entradas. Se han vendido 120 entradas a jubilados, 480 a adultos y 60 a niños. (0.5 puntos por el desarrollo de la resolución y 0.25 puntos por la solución correcta)

4. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0&2&2\end{pmatrix}$,

a) Calcula $A\cdot B\cdot C^T$ (0.75 puntos)

b) Calcula $\frac{1}{3}B^2-I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0.75 puntos)

c) Razona si se puede calcular $(A-B)-C$ y $B\cdot C$ (No es necesario realizar las operaciones). (0.5 puntos)

Solución:

a) $A\cdot B\cdot C^T=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&2&2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}2&1&-1\\2&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$. (0.75 puntos)

b) $\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&-1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}^2-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&-1\\-1&0&1\\-1&-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/3&1/3&-1/3\\-1/3&-1&1/3\\-1/3&-1/3&-1\end{pmatrix}$.
(0.75 puntos)

c) $\dim A=3\times 3,\ \dim B=3\times 3$ por lo que se pueden restar al tener las mismas dimensiones y su diferencia también tendrá esa dimensión. Sin embargo, no se puede restar la matriz resultante con C ya que esta no coinciden en dimensión. (0.25 puntos)

El número de columnas de B no coincide con el número de filas de C por lo que la multiplicación no puede realizarse. (0.25 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. De los 80 estudiantes solicitantes de una beca Erasmus en Italia, 50 son mujeres. Se seleccionan al azar y sin reposición a 3 estudiantes que serán los que disfruten de la beca Erasmus en ese destino. Calcular la probabilidad de que:

a) Los tres seleccionados sean mujeres. (0.5 puntos)

b) Los tres seleccionados sean del mismo sexo. (0.5 puntos)

c) Al menos dos de los seleccionados sean hombres. (0.5 puntos)

Solución:

$M=$ Mujer; $H=$ Hombre.

a) $P(M\cap M\cap M)=P(M)\cdot P(M)\cdot P(M)=\frac{50}{80}\cdot\frac{49}{79}\cdot\frac{48}{78}=0.239$. (0.5 puntos)

b) $P((M\cap M\cap M)\cup(H\cap H\cap H))=P(M)\cdot P(M)\cdot P(M)+P(H)\cdot P(H)\cdot P(H)=\frac{50}{80}\cdot\frac{49}{79}\cdot\frac{48}{78}+\frac{30}{80}\cdot\frac{29}{79}\cdot\frac{28}{78}=0.239+0.049=0.288$. (0.5 puntos)

c) $P((H\cap H\cap M)\cup(H\cap M\cap H)\cup(M\cap H\cap H)\cup(H\cap H\cap H))=3\cdot\frac{30}{80}\cdot\frac{29}{79}\cdot\frac{50}{78}+0.049=0.265+0.049=0.314$. (0.5 puntos)

6. Un fabricante de motores para coches de Fórmula 1 ha tomado una muestra aleatoria de 81 motores para examinar su peso, proporcionando una media de 153 kg. Si se sabe que el peso de los motores sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma=30$ kg,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del peso de los motores con un nivel de confianza del $95\,\%$. (1 punto)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del $93.12\,\%$? (0.5 puntos)

c) El fabricante afirma que el peso medio de los motores es de 145 kg. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del $92\,\%$? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) Del enunciado se deduce: $\bar{X} = 153$ kg, $\sigma = 30$ kg, $n = 81$, $1-\alpha = 0.95 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ (0.25 puntos)

IC $= \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. (0.25 puntos)

IC $= \left(153 - 1.96\frac{30}{\sqrt{81}},\ 153 + 1.96\frac{30}{\sqrt{81}}\right) = (146.47,\ 159.53)$. (0.5 puntos)

b) $1-\alpha = 0.9312 \Rightarrow \alpha = 0.0688 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0344 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.82$. (0.25 puntos)

Error máximo admisible $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.82\frac{30}{\sqrt{100}} = 5.46$ kg. (0.25 puntos)

c) El valor de 145 kg no está en el intervalo calculado al $95\,\%$. Como al disminuir el nivel de confianza, disminuye la amplitud del intervalo, el valor de 145 kg tampoco estará en el IC al $92\,\%$ y por tanto no se puede aceptar la afirmación. (0.25 puntos por la respuesta correcta y 0.25 puntos por la justificación)

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -(x+t)^2 + 2 & \text{si } x \leq -2 \\ t-2 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ x^2 - (t+3)x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) ¿Existe un valor de t para el que la función $f(x)$ es continua en $x = -2$ y en $x = 2$? (0.75 puntos)

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $t = 3$. (0.75 puntos)

Solución:

a) La función es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Para que exista el límite, los límites laterales tienen que ser iguales:

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \lim_{x\to -2} -(x+t)^2 + 2 = -t^2 + 4t - 2 = f(-2)$.

$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2} t - 2 = t - 2$.

$-t^2 + 4t - 2 = t - 2 \Rightarrow t^2 - 3t = 0 \Rightarrow t = 0$ y $t = 3$.

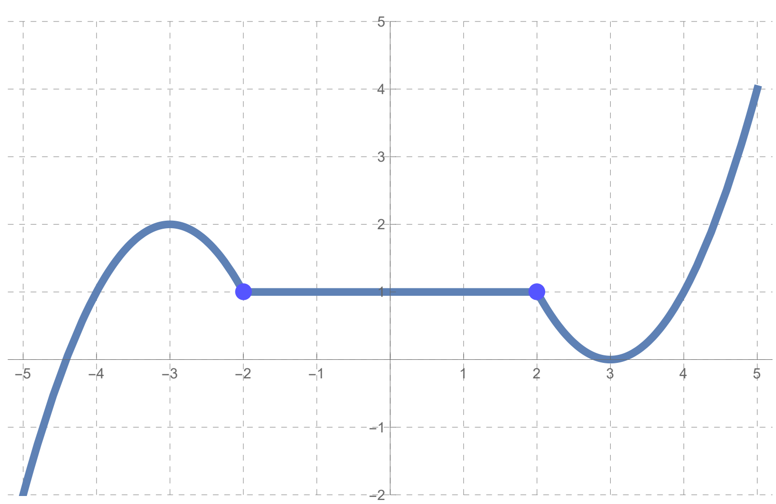
$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2} t - 2 = t - 2 = f(2)$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} x^2 - (t+3)x + 9 = -2t + 7$.

$t - 2 = -2t + 7 \Rightarrow t = 3$.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -2$ y en $x = 2$ entonces $t = 3$. (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.5 puntos)

b) (0.25 puntos por cada trozo bien dibujado)



6. La altura, medida en metros, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba viene expresada en función del tiempo por $H(x) = 20x - 2x^2$ con $x =$ tiempo en segundos y $0 \leq x \leq 10$.

a) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 3 segundos? (0.5 puntos)

b) ¿En qué momentos la pelota se encuentra a 32 metros de altura? (0.5 puntos)

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿En qué momento? (1 punto)

Solución:

a) $H(3) = 42$ metros. (0.5 puntos)

b) $H(x) = 32 \Rightarrow 20x - 2x^2 = 32 \Leftrightarrow x = 2$ y $x = 8$. (0.5 puntos)

c) Máximo relativo si $H'(x) = 0$ y $H''(x) < 0$. $H'(x) = 20 - 4x = 0 \Rightarrow x = 5$.

$H''(x) = -2 \Rightarrow H''(5) = -2 < 0$.

Se evalúan los extremos y se tiene que $H(0) = H(10) = 0$.

El máximo se alcanza a los 5 segundos en $H(5) = 50$ metros. (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto del máximo 0.5 puntos y altura máxima 0.25 puntos)