Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2024
Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
Instrucciones: El examen se compone de tres secciones de dos bloques cada una y cada bloque tiene dos ejercicios. Se debe elegir un bloque de cada una de las tres secciones.
Sólo están permitidas las calculadoras tipo I y II. Se puede hacer uso de colores salvo el color rojo. Es necesario **detallar** el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Una industria fabrica planchas de acero y de aluminio. Cada kilo de plancha de acero requiere 4 horas de trabajo y 60€ en gasto de material y arroja unos beneficios de 45€, mientras que cada kilo de plancha de aluminio supone 7 horas de trabajo y tiene un gasto de 48€ siendo el beneficio de 30€. Cada semana, la industria cuenta con 200 horas de trabajo y 2088€ en material y está obligada a producir un mínimo de 15 kg de planchas de acero y 10 kg de las de aluminio.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)

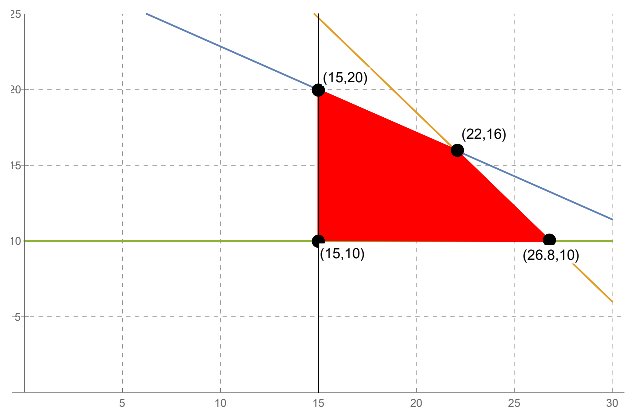
b) Determina cuántos kilos de cada tipo de plancha deben fabricarse para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

Solución:

a) $x \equiv$ kilos de planchas de acero; $y \equiv$ kilos de planchas de aluminio. Función objetivo: $Z(x, y) = 45x + 30y$. (0.25 puntos)

Las restricciones del problema son $\begin{cases} 4x + 7y \leq 200 \\ 60x + 48y \leq 2088 \\ x \geq 15, \ y \geq 10 \end{cases}$

(0.5 puntos por las restricciones y 0.25 puntos por representar la región factible)



Los vértices de la región factible son: $A = (15, 10)$, $B = (15, 20)$, $C = (22, 16)$, y $D = (26.8, 10)$. (0.25 puntos)

b) Aplicados los vértices a la función objetivo $Z(A) = 975$; $Z(B) = 1275$; $Z(C) = 1470$; $Z(D) = 1506$. Se obtiene un beneficio máximo de 1506€ con 26.8 kg de planchas de acero y 10 kg de planchas de aluminio. (0.25 puntos)

2. Tras la Semana Santa, la cantidad de agua embalsada en conjunto entre los embalses de Torre de Abraham, Gasset y Azután es de 156 hm^3. El agua embalsada en Azután coincide con el doble de la diferencia entre Torre de Abraham y Gasset y además, el embalse de Gasset contiene un tercio del agua que contiene Azután.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de agua hay embalsada en cada embalse. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Solución:

a) Tomando $x \equiv$ hm^3 en Torre de Abraham; $y \equiv$ hm^3 en Gasset; $z \equiv$ hm^3 en Azután.

$$\begin{cases} x + y + z = 156 \\ z = 2(x - y) \\ 3y = z \end{cases}$$ (0.25 puntos por cada ecuación bien planteada)

b) La solución del sistema es $(x, y, z) = (60, 24, 72)$ hm^3. El embalse de Torre de Abraham tiene 60 hm^3, el de Gasset 24 hm^3 y el de Azután 72 hm^3. (0.5 puntos por el desarrollo de la resolución y 0.25 puntos por la solución correcta)

Bloque 2

1. El precio, $P(x)$ (en euros), de las acciones de una compañía a lo largo de 10 días $(x \equiv$ días$)$ viene expresado por la función

$$P(x) = \begin{cases} 18x^2 - 100x + 162 & \text{si } 0 \leq x \leq c \\ -x^3 + 18x^2 - 96x + 162 & \text{si } c < x < 10 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valor de c el precio de las acciones se comporta de forma continua en $x = c$? (0.5 puntos)

b) Para $c = 2$, ¿cuándo se tienen los precios máximo y mínimo de las acciones a partir del segundo día? (0.5 puntos)

c) Para $c = 2$, determina en qué intervalos de tiempo el precio de las acciones crece y en cuáles decrece a partir del segundo día. (0.5 puntos)

Solución:

a) La función es continua en $x = c \Leftrightarrow \lim_{x \to c} P(x) = P(c)$. Para que exista el límite, los límites laterales tienen que ser iguales:

$\lim_{x \to c^-} P(x) = \lim_{x \to c} 18x^2 - 100x + 162 = 18c^2 - 100c + 162 = P(c)$.

$\lim_{x \to c^+} P(x) = \lim_{x \to c} -x^3 + 18x^2 - 96x + 162 = -c^3 + 18c^2 - 96c + 162$.

$18c^2 - 100c + 162 = -c^3 + 18c^2 - 96c + 162 \Rightarrow c^3 - 4c = 0 \Rightarrow c = 0$ y $c = \pm 2$. La solución $c = -2$ no es factible, luego solo se consideran $c = 0$ y $c = 2$.

(Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.25 puntos)

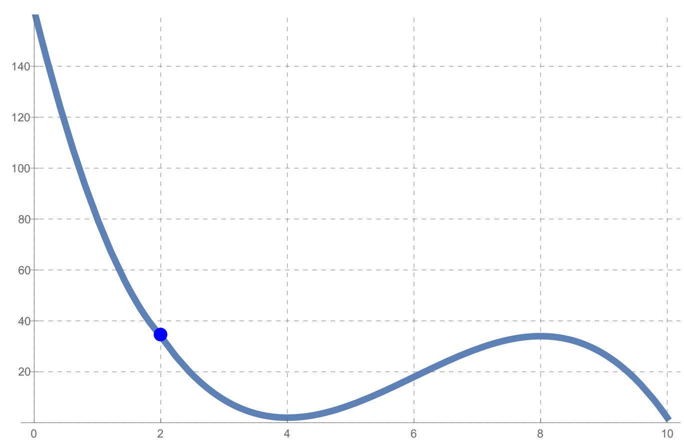
b) Los extremos relativos verifican $P'(x) = 0 \Rightarrow P'(x) = -3x^2 + 36x - 96 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ y $x = 8$.

$P''(x) = -6x + 36 \Rightarrow P''(4) = 12 > 0 \Rightarrow$ mínimo relativo en $(4, 2)$, luego el cuarto día se tiene el precio mínimo de 2€.

$P''(8) = -12 < 0 \Rightarrow$ máximo relativo en $(8, 34)$, luego el octavo día se tiene el precio máximo de 34€.

(Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.25 puntos)

c) $P'(x) > 0$ en el intervalo $(4, 8)$ por lo que la función crece y $P'(x) < 0$ en los intervalos $(2, 4)$ y $(8, 10)$ donde decrece. (0.5 puntos)



2. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, encuentra el valor de los parámetros a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $(0, 3)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $(1, 8)$ es $y = 2x + 6$. (1.5 puntos)

Solución:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx.$$

$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(1) = 8 \\ f'(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 8 \\ 3a + 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow a = -8,\ b = 13,\ c = 3 \Rightarrow f(x) = -8x^3 + 13x^2 + 3.$$

(0.25 por cada condición. 0.75 por la solución correcta)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un taller el $10\,\%$ de las reparaciones se realizan a motos, el $70\,\%$ a coches y el resto a furgonetas. Se sabe que un $20\,\%$ de las reparaciones a motos, un $60\,\%$ de las reparaciones a coches y un $85\,\%$ de las reparaciones a furgonetas las paga el seguro.

a) Elegido un vehículo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la reparación no la pague el seguro? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que una reparación la ha pagado el seguro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de una moto? (0.75 puntos)

Solución:

$M =$ Moto; $C =$ Coche; $F =$ Furgoneta; $S =$ Paga el seguro; $S^c =$ No paga el seguro.

$P(M) = 0.1$; $P(C) = 0.7$; $P(F) = 0.2$; $P(S \mid M) = 0.2$; $P(S \mid C) = 0.6$; $P(S \mid F) = 0.85$.

a) $P(S^c) = P(M) \cdot P(S^c \mid M) + P(C) \cdot P(S^c \mid C) + P(F) \cdot P(S^c \mid F) = 0.1 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.15 = 0.39$. (0.75 puntos)

b) $P(M \mid S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{P(M) \cdot P(S|M)}{P(S)} = \frac{0.1 \cdot 0.2}{1-0.39} = \frac{0.02}{0.61} = 0.033$. (0.75 puntos)

4. Las horas de sueño de la población adolescente española sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4$ horas^2. Se ha tomado una muestra de 12 adolescentes y las horas de sueño registradas han sido $6.5, 8.4, 9.6, 7.4, 7.1, 6.8, 8.8, 8.3, 8.0, 7.1, 7.8$ y 9.0 horas.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de las horas de sueño con un nivel de confianza del $95.96\,\%$. (1 punto)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de 64 adolescentes y un nivel de confianza del $96.52\,\%$? (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:

a) La media muestral es: $\bar{X} = \frac{6.5+8.4+9.6+7.4+7.1+6.8+8.8+8.3+8+7.1+7.8+9}{12} = 7.9$ horas.

Del enunciado se deduce: $\sigma^2 = 4$ horas$^2 \Rightarrow \sigma = 2$ horas, $n = 12$, $1 - \alpha = 0.9596 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.05$. (0.25 puntos)

IC $= \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (0.25 puntos)

IC $= \left(7.9 - 2.05 \frac{2}{\sqrt{12}},\ 7.9 + 2.05 \frac{2}{\sqrt{12}}\right) = (6.7164,\ 9,0836)$. (0.5 puntos)

b) $1 - \alpha = 0.9652 \Rightarrow \alpha = 0.0348 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0174 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.11$. (0.5 puntos)

Error máximo admisible $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.11 \frac{2}{\sqrt{64}} = 0.5275$. (0.5 puntos)

Bloque 2

3. De los bebés inscritos en el mes de mayo en Castilla-La Mancha, 72 tienen el nombre de Alba, Pablo o David. Sabemos que el número de bebés llamados David coincide con la diferencia entre los que se llaman Pablo y las que se llaman Alba. Además, se han inscrito tantas niñas con el nombre de Alba como la suma de los inscritos como David y un tercio de los inscritos como Pablo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántos bebés han sido inscritos con cada uno de los nombres. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Solución:

a) Tomando $x \equiv$ número de bebés llamados Alba; $y \equiv$ número de bebés llamados Pablo; $z \equiv$ número de bebés llamados David.

$$\left\{ \begin{aligned} x + y + z &= 72 \\ z &= y - x \\ x &= z + \tfrac{y}{3} \end{aligned} \right.$$ (0.25 puntos por cada ecuación bien planteada)

b) La solución del sistema es $(x, y, z) = (24, 36, 12)$ bebés. Hay 24 bebés llamados Alba, 36 bebés llamados Pablo y 12 bebés llamados David. (0.5 puntos por el desarrollo de la resolución y 0.25 puntos por la solución correcta)

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 3. (1 punto)

b) Usando la fórmula anterior, expresa A^4 a partir de las matrices A e I y calcula su valor. (1 punto)

Solución:

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

$2A - I = 2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}$.

Luego se verifica que $A^2 = 2A - I$. (0.5 puntos por cada lado de la igualdad)

b) $A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2A - I) \cdot (2A - I) = 4A^2 - 4A + I^2 = 4(2A - I) - 4A + I = 4A - 3I$. (0.5 puntos)

$4\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & -16 & 8 \\ 8 & -4 & 4 \\ -16 & 16 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & -16 & 8 \\ 8 & -7 & 4 \\ -16 & 16 & -7 \end{pmatrix}$. (0.5 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. El $70\,\%$ de los usuarios de una plataforma de streaming ve series, el $20\,\%$ ve documentales y el $12\,\%$ ve series y documentales.

a) ¿Cuál es el porcentaje de usuarios que no ve ni series ni documentales? (0.75 puntos)

b) Si elegido un usuario al azar, indica que ve series, ¿cuál es la probabilidad de que vea documentales? (0.75 puntos)

Solución:

$S =$ series; $D =$ documentales; $P(S) = 0.7$; $P(D) = 0.2$; $P(S \cap D) = 0.12$.

a) $P(S^c \cap D^c) = 1 - P(S \cup D) = 1 - (P(S) + P(D) - P(S \cap D)) = 1 - (0.7 + 0.2 - 0.12) = 1 - 0.78 = 0.22 \Rightarrow 22\,\%$. (0.75 puntos)

b) $P(D \mid S) = \frac{P(S \cap D)}{P(S)} = \frac{0.12}{0.7} = 0.17$. (0.75 puntos)

6. En una empresa de telefonía, el número de llamadas al día que reciben de clientes para hacer reclamaciones sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 280$ llamadas. Se ha tomado una muestra aleatoria de 100 días proporcionando una media de 486 llamadas de clientes al día.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de llamadas con un nivel de confianza del $95\,\%$. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza aumentamos el tamaño de muestra. (0.5 puntos)

c) ¿Se puede aceptar la afirmación de que la media de llamadas al día es de 500 con un nivel de confianza del $99\,\%$? Justifica la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) Del enunciado se deduce: $\bar{X} = 486$ llamadas, $\sigma = 280$ llamadas, $n = 100$, $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$ (0.25 puntos)

IC $= \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (0.25 puntos)

IC $= \left(486 - 1.96 \frac{280}{\sqrt{100}},\ 486 + 1.96 \frac{280}{\sqrt{100}}\right) = (431.12,\ 540.88)$ (0.5 puntos)

b) Al aumentar el tamaño de muestra, disminuye el valor de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y por tanto disminuirá la amplitud del intervalo.

(0.25 puntos por la respuesta correcta y 0.25 puntos por la justificación)

c) El valor de 500 llamadas está en el intervalo calculado al $95\,\%$, como al aumentar el nivel de confianza aumenta la amplitud del intervalo, el valor de 500 llamadas también estará en el IC al $99\,\%$ y por lo tanto se puede aceptar la afirmación.

(0.25 puntos por la respuesta correcta y 0.25 puntos por la justificación)

Bloque 2

5. En una empresa farmacéutica, el rendimiento económico, $R(x)$ (en millones de euros), de un fármaco en función del tiempo, x (en años), desde su lanzamiento viene expresado por la función

$$R(x) = \begin{cases} 2x+4 & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ (5+t)x-1 & \text{si } 2 < x \le 5 \\ -(x+t)^2+(14+t)x-30 & \text{si } 5 < x \le 11 \end{cases}$$

a) ¿Existe algún valor de t para el que el rendimiento económico del fármaco sea continuo en $x=5$? (0.75 puntos)

b) Representa gráficamente el rendimiento económico del fármaco para $t=0$. (0.75 puntos)

Solución:

a) La función es continua en $x=5 \Leftrightarrow \lim_{x\to 5} R\,(x) = R(5)$. Para que exista el límite, los límites laterales tienen que ser iguales:

$\lim_{x\to 5^-} R(x) = \lim_{x\to 5}(5+t)x-1 = 5t+24 = R(5)$.

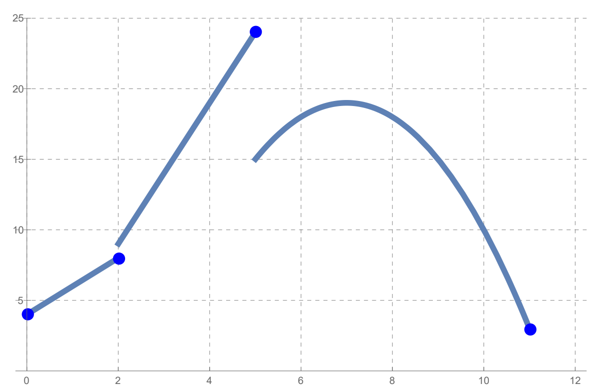
$\lim_{x\to 5^+} R(x) = \lim_{x\to 5} -(x+t)^2+(14+t)x-30 = -t^2-5t+15$.

$5t+24 = -t^2-5t+15 \Rightarrow t^2+10t+9=0 \Rightarrow t=-1$ y $t=-9$.

Para que $R(x)$ sea continua en $x=5$ entonces $t=-1$ y $t=-9$.

(Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.5 puntos)

b) (0.25 puntos por cada trozo bien dibujado)



6. El número de turistas que visitan una ciudad durante un día determinado se ajusta a la función $P(t)=432t-t^3$ donde t es la hora del día entre las 8 de la mañana y las 8 de la tarde $(8 \le t \le 20)$ y $P(t)$ indica el número de visitantes.

a) ¿En qué momento del día se produce una máxima afluencia? ¿Cuál es esa máxima afluencia? (1.25 puntos)

b) ¿En qué intervalos de horas sube y en cuáles baja la afluencia de visitantes? (0.75 puntos)

Solución:

a) Máximo relativo si $P'(t)=0$ y $P''(t)<0 \Rightarrow P'(t)=432-3t^2=0 \Rightarrow t^2=144 \Rightarrow t=\pm 12$.

$P''(t)=-6t \Rightarrow P''(12)=-72<0 \Rightarrow$ máximo relativo en $(12, 3456)$.

Evaluando los extremos $P(8)=2944$ y $P(20)=640$. La máxima afluencia se alcanza a las 12 horas con 3456 turistas.

(Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto de óptimos 0.5 puntos y valor máximo de afluencia 0.5 puntos)

b) $P'(t)>0$ en el intervalo $(8,12)$ por lo que la función crece en ese intervalo. $P'(t)<0$ en el intervalo $(12,20)$ por lo que la función decrece en ese intervalo.

(Saber las condiciones 0.25 puntos. Cada intervalo bien calculado 0.25 puntos)