Evaluación para el Acceso a la Universidad. Convocatoria de 2024
Materia: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II
Instrucciones: El examen se compone de tres secciones de dos bloques cada una y cada bloque tiene dos ejercicios. Se debe elegir un bloque de cada una de las tres secciones.
Sólo están permitidas las calculadoras tipo I y II. Se puede hacer uso de colores salvo el color rojo. Es necesario **detallar** el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m^2 de cartón y de 432 m de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0.20 m^2 de cartón y 0.30 m de cinta de goma y se vende a 2.10€ la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0.15 m^2 de cartón y 0.27 m de cinta de goma y se vende a 1.50€ la unidad.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.25 puntos)

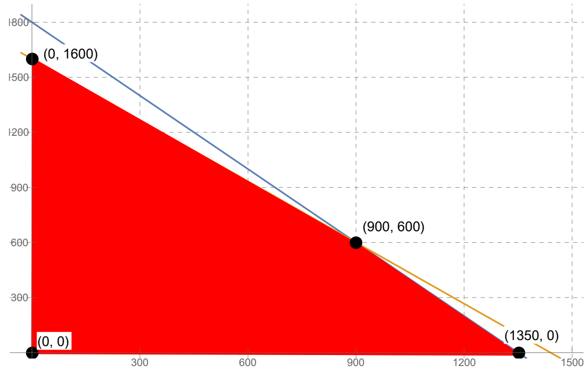
b) Determina cuántas carpetas de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo. (0.25 puntos)

Solución:

a) Llamando x a las carpetas de tamaño folio e y a las de tamaño cuartilla, la función objetivo será: $Z(x, y) = 2.1x + 1.5y$. (0.25 puntos)

Las restricciones del problema son $\left\{\begin{array}{l} 0.2x + 0.15y \leq 270 \\ 0.3x + 0.27y \leq 432 \\ x \geq 0,\ y \geq 0 \end{array}\right.$

(0.5 puntos por las restricciones y 0.25 puntos por representar la región factible)



Los vértices de la región factible son: $A = (0, 0)$, $B = (0, 1600)$, $C = (1350, 0)$, y $D = (900, 600)$. (0.25 puntos)

b) Aplicados los vértices a la función objetivo $Z(A) = 0$; $Z(B) = 2400$; $Z(C) = 2835$; $Z(D) = 2790$. Se tiene un beneficio máximo de 2835€ con 1350 carpetas de tamaño folio y 0 carpetas de tamaño cuartilla. (0.25 puntos)

2. En la fase nacional de la Olimpiada de Matemáticas Española se reparten un total de 36 medallas, divididas en oro, plata y bronce. El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro y sabemos que, si dos de las medallas de plata se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de medallas de cada tipo se reparten. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Solución:

a) Tomando $x \equiv$ número de medallas de oro; $y \equiv$ número de medallas de plata; $z \equiv$ número de medallas de bronce.

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + z = 36 \\ 3x = z \\ 2(y-2) = z + 2 \end{array}\right.$$ (0.25 puntos por cada ecuación bien planteada)

b) La solución del sistema es $(x, y, z) = (6, 12, 18)$ medallas. Se reparten 6 medallas de oro, 12 medallas de plata y 18 medallas de bronce. (0.5 puntos por el desarrollo de la resolución y 0.25 puntos por la solución correcta)

Bloque 2

1. La evolución de la rentabilidad de un fondo de inversión a lo largo del tiempo, x en años, viene definida por la función

$$R(x) = \begin{cases} -(x+(t-3))^2+(t+27) & \text{si } 0 \le x \le 3 \\ -\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + 5x - 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

a) ¿Para qué valores de t la rentabilidad del fondo, $R(x)$, es una función continua en $x = 3$? (0.5 puntos)

b) Para $t = -2$, ¿cuándo se tiene la mayor rentabilidad en el fondo a partir del tercer año? (0.5 puntos)

c) Para $t = -2$, determina en qué intervalos de tiempo la rentabilidad del fondo crece y en cuáles decrece a partir del tercer año. (0.5 puntos)

Solución:

a) La función es continua en $x = 3 \Leftrightarrow \lim_{x\to 3} R(x) = R(3)$. Para que exista el límite, los límites laterales tienen que ser iguales:

$\lim_{x\to 3^-} R(x) = \lim_{x\to 3} -(x+(t-3))^2 + (t+27) = -t^2 + t + 27 = R(3)$.

$\lim_{x\to 3^+} R(x) = \lim_{x\to 3} -\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + 5x - 3 = -9t + 3$.

$-t^2 + t + 27 = -9t + 3 \Rightarrow t^2 - 10t - 24 = 0 \Rightarrow t = -2$ y $t = 12$.

(Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.25 puntos)

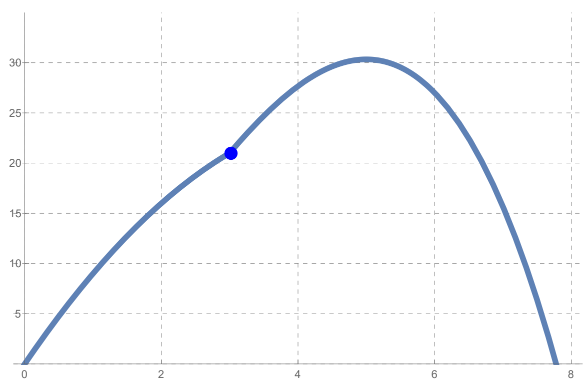
b) Los extremos relativos verifican $R'(x) = 0 \Rightarrow R'(x) = -x^2 + 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ y $x = 5$.

$R''(x) = -2x + 4 \Rightarrow R''(5) = -6 < 0 \Rightarrow$ máximo relativo en $(5, \frac{91}{3})$ ($x = -1 \notin (3, \infty)$).

(Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.25 puntos)

c) $R'(x) > 0$ en el intervalo $(3, 5)$ por lo que la función crece y $R'(x) < 0$ en el intervalo $(5, \infty)$ donde decrece.

(0.25 por cada intervalo correcto)



2. Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$, encuentra el valor de los parámetros a, b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto $(-1, 0)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 0$ es $y = x$. (1.5 puntos)

Solución:

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c.$$

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f'(-1) = 0 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 - a + b - c = 0 \\ -4 + 3a - 2b + c = 0 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 3,\ b = 3,\ c = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x.$$

(0.25 por cada condición. 0.75 por la solución correcta)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. Una empresa de consultoría tiene dos sedes, una en Toledo y otra en Cuenca. La sede de Toledo está formada por 6 analistas y 6 desarrolladores, mientras que la de Cuenca la forman 4 analistas y 6 desarrolladores. Además, se sabe que el $30\,\%$ de los analistas y el $50\,\%$ de los desarrolladores de la empresa usan MacBooks en su trabajo diario.

a) Elegido un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no use MacBook? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que un trabajador usa MacBook, ¿cuál es la probabilidad de que sea desarrollador? (0.75 puntos)

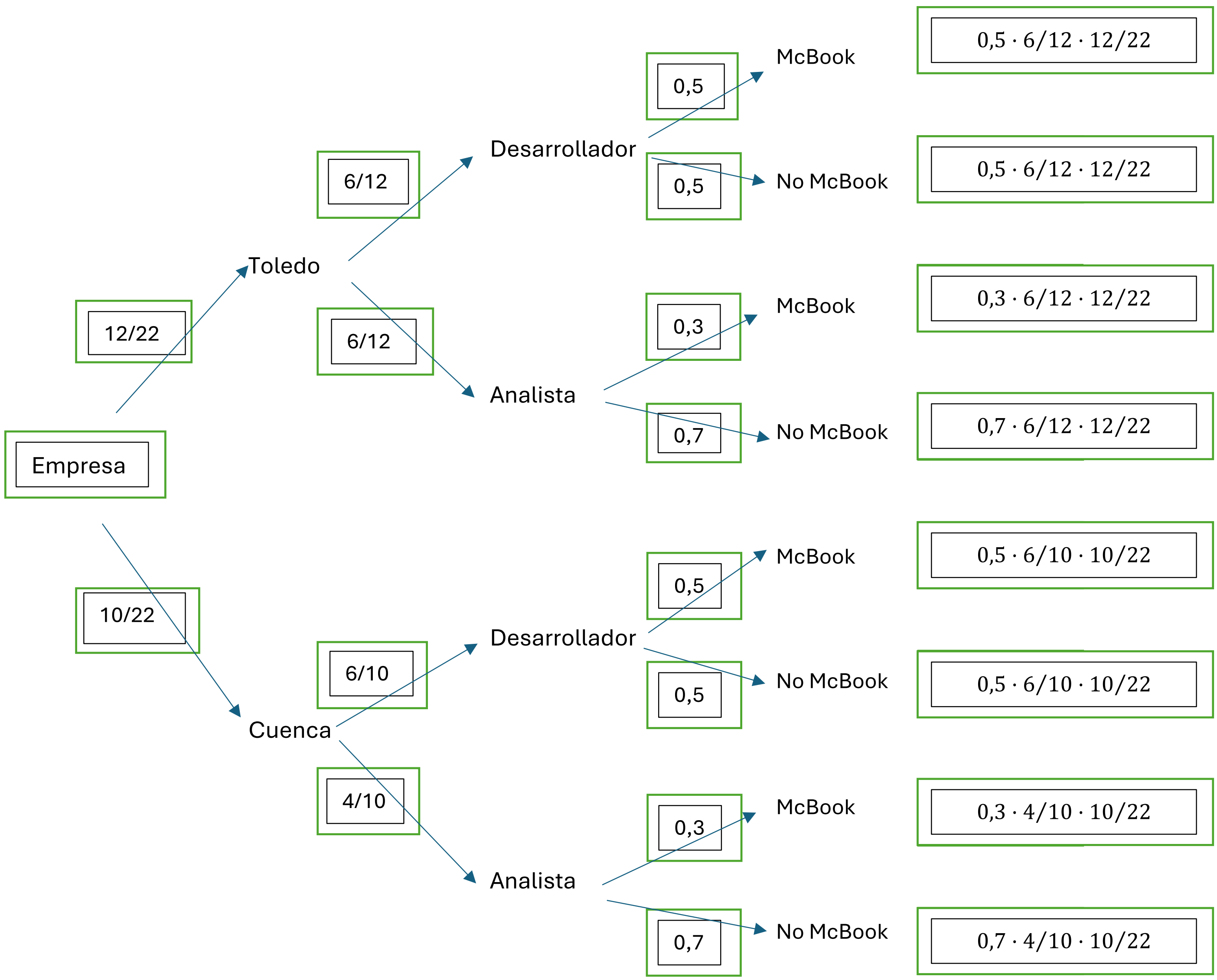
Solución: Como en las probabilidades a calcular hacen referencia únicamente a los trabajadores de la empresa, los sucesos y probabilidades necesarias para resolver el problema son: $A =$ Analista; $D =$ Desarrollador; $M =$ Usa MacBook.

$P(A) = \frac{10}{22}$; $P(D) = \frac{12}{22}$; $P(M \mid A) = 0.3$; $P(M \mid D) = 0.5$.

a) $P(M^c) = P(A) \cdot P(M^c \mid A) + P(D) \cdot P(M^c \mid D) = \frac{10}{22} \cdot 0.7 + \frac{12}{22} \cdot 0.5 = 0.591$. (0.75 puntos)

b) $P(D \mid M) = \frac{P(D \cap M)}{P(M)} = \frac{P(D) \cdot P(M|D)}{P(M)} = \frac{\frac{12}{22} \cdot 0.5}{1 - 0.591} = 0.667$. (0.75 puntos)

Sin embargo, aunque la frase *...se sabe que el $30\,\%$ de los analistas y el $50\,\%$ de los desarrolladores de la empresa usan MacBooks...* se refiere al global de la empresa, se podía representar en forma de árbol el ejercicio incluyendo las sedes de la empresa y resolver el ejercicio de esta forma obteniendo los mismos resultados.



4. Un fabricante de microprocesadores ha tomado una muestra aleatoria de 144 chips y ha medido el tiempo de ejecución de una operación, proporcionando una media de 142 milisegundos. Si se sabe que el tiempo de ejecución de los chips sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 42$ milisegundos,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de ejecución de los chips con un nivel de confianza del $94.64\,\%$. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del $94.12\,\%$, el error máximo admisible sea menor que 8 milisegundos. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Solución:

a) $\bar{X} = 142$ milisegundos, $\sigma = 42$ milisegundos, $n = 144$, $1 - \alpha = 0.9464 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.93$ (0.25 puntos)

IC $= \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$. (0.25 puntos)

IC $= \left(142 - 1.93 \frac{42}{\sqrt{144}},\ 142 + 1.93 \frac{42}{\sqrt{144}} \right) = (135.245,\ 148.755)$. (0.5 puntos)

b) El error máximo admisible viene dado por $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = \left(\frac{Z_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{E} \right)^2$ (0.25 puntos)

$1 - \alpha = 0.9412 \Rightarrow \alpha = 0.0588 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0294 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.89$. (0.25 puntos)

Para $E = 8 \Rightarrow n = \left(\frac{1.89 \cdot 42}{8} \right)^2 = (9.9225)^2 = 98.456$. El tamaño mínimo de la muestra para que el error de estimación de la media sea inferior a 8 milisegundos, con un nivel de confianza del $94.12\,\%$ debe ser de 99 chips. (0.5 puntos)

Bloque 2

3. En una clase se celebran elecciones para delegada y se presentan dos candidatas, Inés y Nerea. Se sabe que cuatro veces el número de votos obtenido por Nerea menos tres veces el número de votos obtenidos por Inés excede al número de votos nulos en un voto. Si dividimos el número de votos obtenidos por Inés entre el número de los obtenidos por Nerea se obtiene de cociente 1 y de resto 7 (Algoritmo de la división: D=d·c+r). El $5\,\%$ del total de votos emitidos es nulo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular el número de votos nulos y los que recibieron Inés y Nerea. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Solución:

a) Tomando $x \equiv$ número de votos de Inés; $y \equiv$ número de votos de Nerea; $z \equiv$ número de votos nulos.

$$\left\{ \begin{array}{c} 4y - 3x = z + 1 \\ x = y + 7 \\ z = \frac{5}{100}(x + y + z) \end{array} \right. \quad \text{(0.25 puntos por cada ecuación bien planteada)}$$

b) La solución del sistema es $(x, y, z) = (32, 25, 3)$ votos. Inés obtuvo 32 votos, Nerea 25 votos y 3 votos fueron nulos. (0.5 puntos por el desarrollo de la resolución y 0.25 puntos por la solución correcta)

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula, si es posible, $C + A \cdot B$ (0.75 puntos)

b) ¿Son iguales $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1}$ y $(C + A \cdot B)^{-1}$? (1.25 puntos)

Solución:

a) $C + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. (0.75 puntos)

b) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; $(A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; $(C + A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (0.25 puntos por inversa)

$C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7 & 0 \\ -6/7 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = (C + A \cdot B)^{-1}$. (0.5 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En un instituto el $64\,\%$ de los estudiantes aprueban Matemáticas, el $72\,\%$ aprueban Inglés y el $78\,\%$ aprueban Matemáticas o Inglés o ambas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de suspender alguna de las dos asignaturas? (0.75 puntos)

b) ¿Son independientes los sucesos aprobar Matemáticas y aprobar Inglés? Justica la respuesta. (0.75 puntos)

Solución:

$M =$ aprobar Matemáticas; $I =$ aprobar Inglés; $P(M) = 0.64$; $P(I) = 0.72$; $P(M \cup I) = 0.78$.

a) $P(M^c \cup I^c) = 1 - P(M \cap I) = 1 - (P(M) + P(I) - P(M \cup I)) = 1 - (0.64 + 0.72 - 0.78) = 1 - 0.58 = 0.42$. (0.75 puntos)

b) Dos sucesos son independientes si $P(M \cap I) = P(M) \cdot P(I) \Leftrightarrow 0.58 = 0.64 \cdot 0.72$ como $0.58 \neq 0.4608$ entonces los sucesos no son independientes. (0.75 puntos)

6. La edad de los usuarios de un juego online sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4$ años^2. Se ha tomado una muestra de 10 usuarios y sus edades eran 16, 19, 21, 15, 14, 18, 20, 15, 14 y 18 años.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la edad de los usuarios con un nivel de confianza del $97\,\%$. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con menor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.5 puntos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 81 y un nivel de confianza del $95.44\,\%$? (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Solución:

a) La media muestral es: $\bar{X} = \frac{16+19+21+15+14+18+20+15+14+18}{10} = 17$ años.

Del enunciado se deduce: $\sigma^2 = 4$ años$^2 \Rightarrow \sigma = 2$ años, $n = 10$, $1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$. (0.25 puntos)

IC $= \left(\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad \bar{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (0.25 puntos)

IC $= \left(17 - 2.17 \frac{2}{\sqrt{10}},\ 17 + 2.17 \frac{2}{\sqrt{10}}\right) = (15.628,\ 18.372)$. (0.5 puntos)

b) Para disminuir la amplitud del intervalo manteniendo el nivel de confianza, hay que disminuir el valor de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y como σ es un valor dado, la única opción es aumentar el tamaño de muestra.

(0.25 puntos por la respuesta correcta y 0.25 puntos por la justificación)

c) $1 - \alpha = 0.9544 \Rightarrow \alpha = 0.0456 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.0228 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2$. (0.25 puntos)

Error máximo admisible $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \frac{2}{\sqrt{81}} = 0.444$. (0.25 puntos)

Bloque 2

5. Durante una tormenta, la altura, $A(x)$, que han alcanzado las olas del mar, en metros, se puede expresar con respecto al tiempo (x en horas) mediante la función

$$A(x) = \begin{cases} -(2x+t)^2 + (11+t) & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ x^2 - 8x + 19 + t & \text{si } 2 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

a) Halla los valores de t para que la función de la altura de las olas sea continua en $x = 2$. (0.75 puntos)

b) Representa gráficamente la función de la altura de las olas, $A(x)$, para el valor $t = -1$. (0.75 puntos)

Solución:

a) La función es continua en $x = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \to 2} A(x) = A(2)$. Para que exista el límite, los límites laterales tienen que ser iguales:

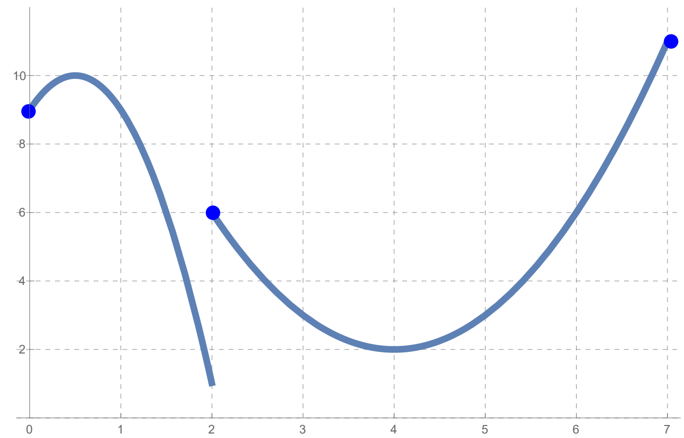
$\lim_{x \to 2^-} A(x) = \lim_{x \to 2} (-(2x+t)^2 + (11+t)) = -t^2 - 7t - 5$.

$\lim_{x \to 2^+} A(x) = \lim_{x \to 2} (x^2 - 8x + 19 + t) = t + 7 = A(2)$.

$-t^2 - 7t - 5 = t + 7 \Rightarrow t^2 + 8t + 12 = 0 \Rightarrow t = -2$ y $t = -6$.

(Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto 0.5 puntos)

b) (0.25 puntos por cada trozo bien dibujado. Todo correcto 0.75 puntos)



6. La evolución del número de socios de un determinado club de fútbol desde el año de su fundación, 1965 $(t = 0)$, hasta su desaparición en 2018 $(t = 53)$ viene dada por la expresión $S(t) = -0.5 \cdot (2t^3 - 34t^2 - 3968t - 60)$ donde t se expresa en años.

a) ¿Cuántos socios tenía el club en el año del mundial en España, 1982? (0.5 puntos)

b) ¿En qué momento de la existencia del club se alcanzan el máximo y mínimo número de socios? ¿Cuáles son los valores del máximo y mínimo número de socios? (1.5 puntos)

Solución:

a) El año $1982 \Rightarrow t = 17 \Rightarrow S(17) = 33758$ socios. (0.5 puntos)

b) Extremo relativo si $S'(t) = 0 \Rightarrow S'(t) = -3t^2 + 34t + 1984 = 0 \Rightarrow t = 32$ y $t = -\frac{62}{3}$. El valor $t = -\frac{62}{3}$ no tiene sentido por lo que se descarta.

   $S''(t) = -6t + 34 \Rightarrow S''(32) = -158 < 0 \Rightarrow t = 32$ es un máximo relativo.

   Se evalúan los extremos y se tiene que $S(0) = 30$ y $S(53) = 4058.$

   El máximo se alcanza a los 32 años, en 1997, con $S(32) = 48158$ socios y el mínimo el año de la fundación, 1965, con $S(0) = 30$ socios.

   (Saber las condiciones 0.25 puntos. Cálculo correcto del máximo 0.5 puntos. Valores máximo y mínimo de socios 0.75 puntos)