Actividades para introducir los logaritmos en la ESO de forma indolora.

Elena Gajate Paniagua. Licenciada en Matemáticas por la Universidad de Salamanca.
IES Maestro Juan de Ávila (Ciudad Real).

Muchas personas recuerdan los logaritmos como algo engorroso y poco útil que tuvieron que aprender en su adolescencia no se sabe muy bien por qué.

Para luchar contra esta idea se presentan algunas actividades en las que los estudiantes perciben la necesidad del concepto de logaritmo y su utilidad práctica ayudándonos de aplicaciones del móvil, GeoGebra o la hoja de cálculo, entre otros, para resolver problemas contextualizados en los que intervienen logaritmos.

El estudio de los logaritmos se aborda tradicionalmente en la ESO desde su definición, propiedades, montones de ejercicios descontextualizados y, con mucha suerte, una mención final a su aplicación en terremotos, pH y decibelios. En bachillerato, muchas ecuaciones descontextualizas en el bloque de álgebra y el estudio de la función logarítmica en otro tema distinto, a menudo también descontextualizada.

Nuestro objetivo es introducir los logaritmos dándoles un sentido y un contexto real. Se cuenta aquí la experiencia realizada en 4º de ESO, donde intentamos despertar la curiosidad y ver la necesidad de los logaritmos antes de definirlos. Para ello plantearemos las siguientes actividades:

1. El experimento de los decibelios.

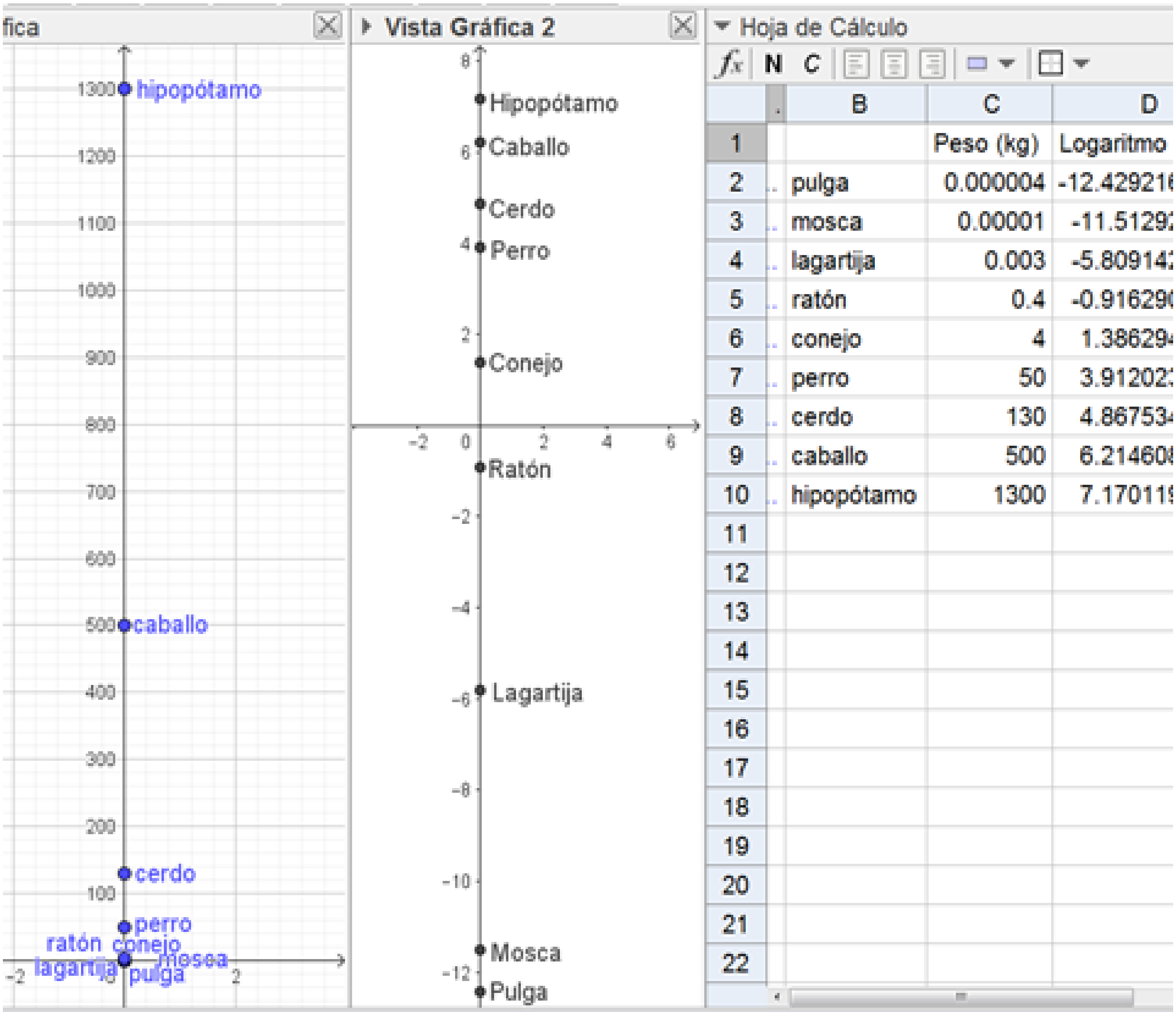
Es necesario tener descargado en el teléfono móvil un sonómetro o medidor de decibelios. Se les pide a dos alumnos que hagan “Ahhh” delante del móvil, primero cada uno por separado y después los dos a la vez. Los decibelios emitidos por los dos no son, como muchos esperaban, la suma de los que emiten por separado. ¿Por qué sucede esto? La respuesta no se puede dar aún, pero pronto la conocerán.

2. Escalas imposibles

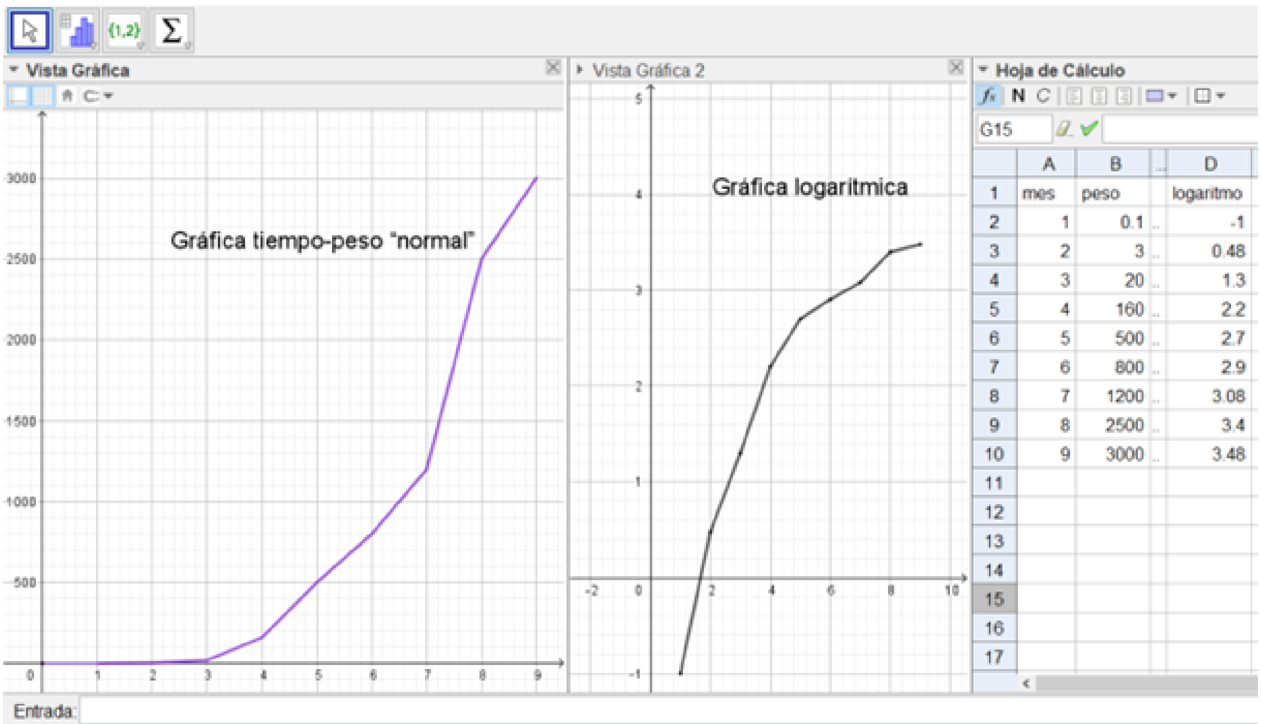
a) Invitaremos a los alumnos a investigar sobre el tamaño de los animales. Se les pedirá que, buscando información en internet, hagan una tabla con el peso medio de al menos 10 ó 12 animales de distintos tamaños y en los que aparezca el más pequeño y el más grande, así como representantes intermedios. Después se les pedirá que elaboren un gráfico numérico lineal en el que sitúen a cada animal en el valor que le corresponde por su peso medio. Así se percatarán de la dificultad de elegir la escala adecuada para que quepan todos y no aparezcan amontonados los más pequeños.

b) Se pedirá que elaboren un gráfico temporal de, por ejemplo, la evolución del peso de un embrión humano a lo largo de los nueve meses de gestación, o la evolución de la población de un país a lo largo de un lapso temporal de varios siglos. En ambos casos la curva aparece en su primer tramo “pegada al suelo”, como si ahí no hubiera habido evolución. O bien, si queremos ver ésta, no podemos dibujar la curva entera ya que al final se dispara y no cabe. De nuevo tenemos un problema de escala.

Ambos problemas los resolveremos expresando los datos como potencias decimales y fijándonos en el exponente (primero invitaremos a nuestros alumnos a hacerlo con la tecla x^y ó ^ de la calculadora, luego ya les hablaremos de la tecla log)



	B	C	D
1		Peso (kg)	Logaritmo
2	pulga	0.000004	-12.429216
3	mosca	0.00001	-11.51292
4	lagartija	0.003	-5.80914
5	ratón	0.4	-0.91629
6	conejo	4	1.38629
7	perro	50	3.91202
8	cerdo	130	4.86753
9	caballo	500	6.21460
10	hipopótamo	1300	7.17011



	A	B	D
1	mes	peso	logaritmo
2	1	0.1	-1
3	2	3	0.48
4	3	20	1.3
5	4	160	2.2
6	5	500	2.7
7	6	800	2.9
8	7	1200	3.08
9	8	2500	3.4
10	9	3000	3.48

3. Otra forma de multiplicar y dividir.

Muchos estudiantes sólo “saben” multiplicar o dividir utilizando el algoritmo tradicional aprendido en la infancia. Si se les pide que dividan 1024 entre 32 a pocos se les ocurrirá expresarlos mentalmente como potencias de 2 y restar exponentes. Lo mismo para hacer raíces o potencias. Se propondrá a los alumnos utilizar esta “técnica” para que comprueben el ahorro de trabajo que a veces supone expresar los números en una base concreta, como se muestra en el siguiente ejemplo:

A continuación tienes una tabla con las 15 primeras potencias naturales de 2:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768

Calcula mentalmente, con su ayuda, a) $1024 \cdot 8$ *b)* $32768 : 128$ *c)* 32^3 *d)* $\sqrt{4096}$

Antes de que se generalizasen las calculadoras, la tabla de logaritmos permitía simplificar cálculos como los anteriores expresando los números como potencias de 10. Aunque no se explique exhaustivamente el proceso que se seguía, es interesante que nuestros alumnos conozcan, al menos rudimentariamente, cómo se calculaba hasta hace no tanto tiempo.

4. Solución al problema del sonómetro: ¿Cómo se mide el ruido?

La definición formal del decibelio puede resultar a primera vista un poco difícil de entender a muchos estudiantes:

$$dB = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

Como I_0 refleja la intensidad mínima que percibe el oído humano, el cociente sirve simplemente para poner el resto de intensidades en relación a aquélla, es decir, se toma como unidad de medida la intensidad umbral (UA).

El rango de sonidos percibidos por el oído humano es tan grande que es más práctico tomar el logaritmo de la intensidad, ya que al mismo tiempo distinguimos diferencias de intensidades muy sutiles para ese enorme rango (podríamos decir que oímos logarítmicamente). Esto se ve en la siguiente tabla:

Sonido	Intensidad en w/m^2	Intensidad en UA	Logaritmo (belios)	Decibelios (10 x belios)
Umbral de audición	10^{-12}	**1**	0	0
Estudio de grabación	10^{-11}	**10**	1	10
Biblioteca en silencio	10^{-9}	**1000**	3	30
Lavadora	10^{-6}	$\mathbf{10^6}$	6	60
Patio de recreo	10^{-4}	$\mathbf{10^8}$	8	80
Martillo neumático	10^{-1}	$\mathbf{10^{11}}$	11	110
Umbral de dolor (explosión)	1	$\mathbf{10^{12}}$	12	120

Fuente: http://www.cochlea.org/es/sonidos/campo-auditivo-humano

Si el “Ahhh” de Cristina alcanzaba los 63 dB y el de Luis los 58 dB, tendríamos:

	dB	belios	Intensidad en UA
Cristina	63	6.3	$10^{6.3} \cong 1\,995\,000$
Luis	58	5.8	$10^{5.8} \cong \quad 631\,000$
Juntos			$2\,626\,000$

Como $\log 2\,626\,000 \cong 6.4$, juntos emiten 64 dB

Podemos invitar a nuestros alumnos a buscar más ejemplos (pH, terremotos, luminosidad de las estrellas…); todos tienen en común rangos enormes en los que los valores más pequeños están sin embargo tan próximos que con una escala normal se confundirían. La escala logarítmica se presenta así como una solución ingeniosa y práctica.

De esta forma, los ejercicios y las ecuaciones logarítmicas se contextualizan con problemas como los siguientes:

Si un violín emite 85 decibelios a) ¿cuántos emitirá un cuarteto de violines? b)¿Cuántos violines se necesitarán para llegar a los 100 dB?

a) $10 \cdot \log(4 \cdot 10^{8,5}) \cong 91;$

b) $100 \text{ dB} = 10\text{B} \Rightarrow 10 = \log(\text{x} \cdot 10^{8,5}) \Rightarrow \text{x} \cdot 10^{8,5} = 10^{10} \Rightarrow \text{x} = 10^{1,5} \cong 32$

Si mezclo un litro de agua (de pH 7) con un litro de zumo de limón (de pH 2) a) ¿cuál será el pH de la mezcla? b) ¿Cuánta agua hay que echar a un litro de limón para que el pH de la mezcla sea 4?

a) $\text{pH (mezcla a partes iguales)} = -\log\left(\frac{10^{-7} + 10^{-2}}{2}\right) \cong 2{,}3$

b) Si llamamos x al número de litros de agua necesarios para elevar el pH a 4:

$$-\log\left(\frac{x \cdot 10^{-7} + 10^{-2}}{1 + x}\right) = 4 \Rightarrow \frac{x \cdot 10^{-7} + 10^{-2}}{1 + x} = 10^{-4} \Rightarrow x \cong 990$$

Si bien las ecuaciones obtenidas son quizá más sencillas de resolver que las que aparecen en los libros de texto, pensamos que obtenerlas es una actividad más rica cognitivamente y que contribuye mejor a entender el sentido de los logaritmos, así como a relacionar conceptos que no deberían verse de forma desconectada.