Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2020/2021

Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver **CUATRO** de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) **[1 punto]** Calcula razonadamente la matriz inversa de A.

b) **[1,5 puntos]** Calcula razonadamente la matriz X de la ecuación matricial $AX + 3I = A$.

Solución:

a) El determinante de A es $|A| = -2$, por lo que la matriz es invertible. La matriz adjunta de A es $adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Por tanto, la matriz inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{-2} adj(A)^\top = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

<u>**Criterios de corrección:**</u>

- Explicación y justificación del método: 0,25 puntos.
- Cálculo del determinante y de la matriz adjunta: 0,5 puntos.
- Resultado final correcto: 0,25 puntos.

b) Operando y despejando:
$AX + 3I = A \Longrightarrow X = A^{-1}(A - 3I)$. Teniendo en cuenta que $A^{-1}A = I$ y que $A^{-1}I = A^{-1}$, tenemos que $X = I - 3A^{-1}$.

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -3/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$X = \begin{pmatrix} -1/2 & 3/2 & 3/2 \\ -3/2 & 11/2 & -3/2 \\ 3/2 & -9/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

<u>**Criterios de corrección:**</u>

- Despejar X en la ecuación matricial: $0,5$ puntos.
- Obtención de $A^{-1}(A - 3I)$: 0,75 puntos
- Resultado final correcto: $0,25$ puntos.

2. *a*) **[1,75 puntos]** Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x & +ay & +z & = & 2 \\ x & & +z & = & a \\ ax & +2y & +z & = & 3 \end{array} \right. .$$

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para $a = 2$, si es posible.

Solución:

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 2 & 1 \end{pmatrix}; \; AM = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ a & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$|A| = a^2 - a = 0 \longleftrightarrow a = 0, a = 1.$

- Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, Rango(A)=Rango(AM)=3, sistema compatible determinado.
- Si $a = 0$, Rango(A)=2, Rango(AM)=3, sistema incompatible.
- Si $a = 1$, Rango(A)=2, Rango(AM)=2, sistema compatible indeterminado.

Criterios de corrección:

- Obtención de $|A|$ y el valor de los parámetros donde se anula: 0,5.
- Discusión razonada del caso en que a es distinto de los valores en los que se anula el determinante de A: 0,25 puntos
- Cálculo del rango de A y de AM cuando $a = 0$: 0,25 puntos. Discusión razonada en ese caso: 0,25 puntos.
- Cálculo del rango de A y de AM cuando $a = 1$: 0,25 puntos. Discusión razonada en ese caso: 0,25 puntos.

b) Si $a = 2$, Rango(A)=Rango(AM)=3$\Longrightarrow$ sistema compatible determinado.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 = F_1 - F_2 \\ \\ F_3 = F_3 - 2F_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 = F_1/2 \\ \\ F_3 = -(F_3 - F_1/2) \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; F_2 = F_2 - F_3 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{matrix} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{matrix} \right.$$

Criterios de corrección:

Proceso de resolución del problema: 0,75 puntos.

3. *a*) **[1,25 punto]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int x \cdot cos(3x)dx$.

   b) **[1,25 puntos]** Calcula razonadamente la siguiente integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+1}$.

Solución:

a) Integral por partes tomando $\left\{ \begin{array}{ll} u = x; & du = dx \\ dv = \cos(3x)\; dx; & v = \operatorname{sen}(3x)/3 \end{array} \right.$. Por tanto,

$\int x \cdot \cos(3x)dx = x \operatorname{sen}(3x)/3 - \int \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} dx = x \operatorname{sen}(3x)/3 + \frac{\cos 3x}{9} + C.$

Criterios de corrección:

- Identificar el tipo de integral y plantear la integración por partes: 0,50 puntos.
- Plantear los dos términos de la integral por partes: 0,25 puntos.
- Resolución del la integral del segundo término de la integral por partes: 0,25 puntos.
- Realizar todos los cálculos correctamente y dar la solución correcta: 0,25 puntos.

b) $\int \frac{dx}{2x^2+1} = \int \frac{dx}{(\sqrt{2}\cdot x)^2+1} = \int \frac{(\sqrt{2}/\sqrt{2})dx}{(\sqrt{2}\cdot x)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} \cdot x) + C.$

Criterios de corrección:

- Resolución justificada de la integral: 1 punto.
- Obtención del resultado final: 0,25 puntos.

4. Sean los planos $\pi_1 \equiv a \cdot x + y + 2 \cdot z = 3$ y $\pi_2 \equiv 2 \cdot x - y + a \cdot z = 0$.

   a) **[1 punto]** Determina razonadamente el valor de a para que los planos π_1 y π_2 sean perpendiculares.

   b) **[1,5 puntos]** Para $a = 1$ calcula la distancia del punto $P(2, 0, 1)$ al plano π_1.

Solución:

a) El vector normal al plano π_1 es $\vec{u} = (a, 1, 2)$ y el del plano π_2 es $\vec{v} = (2, -1, a)$. Los planos π_1 y π_2 van a ser perpendiculares si y solo si sus vectores normales lo son. Para que sean perpendiculares su producto escalar ha de ser cero: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2a - 1 + 2a = 0 \longleftrightarrow 4a - 1 = 0 \longleftrightarrow a = 1/4$.

Criterios de corrección:

- Planteamiento del problema: 0,25 puntos.
- Obtención de los vectores normales: 0,25 puntos
- Producto escalar: 0,25 puntos.
- Cálculo del valor de a: 0,25 puntos

b) Para $a = 1$ el plano es $\pi_1 \equiv x + y + 2 \cdot z = 3$. Sea $Q(x, y, z)$ (abusando de la notación) el punto del plano que define la distancia mínima al punto P, es decir, tal que $d(P, \pi_1) = |\vec{QP}|$. Como $|\vec{QP} \cdot \vec{u}| = |\vec{QP}| \cdot |\vec{u}|$, tenemos que la distancia al plano de P es $|\vec{QP} \cdot \vec{u}|/|\vec{u}|$.

Como $|\vec{QP} \cdot \vec{u}| = |(2-x, -y, 1-z) \cdot (1, 1, 2)| = |2-x-y+2(1-z)| = |4-(x+y+2z)| = |4-3| = 1$. Además, $|\vec{u}| = |\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}| = \sqrt{6}$. Por tanto, la distancia al plano π_1 del punto P es $1/\sqrt{6}$.

Criterios de corrección:

- Planteamiento del problema: 0,25 puntos.
- Cálculo de $|\vec{QP} \cdot \vec{u}|$: 0,5 puntos.
- Cálculo de $|\vec{u}|$: 0,5 puntos.
- Obtención del resultado final: 0,25 puntos.

5. *a*) **[1 punto]** Calcula razonadamente el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{e^{x-1} - 1}$.

   b) **[1,5 puntos]** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ x & \text{si} \quad x > 2 \end{cases},$$

   estudia su continuidad en $x = 0$ y en $x = 2$ e indica el tipo de discontinuidad, si la hubiera.

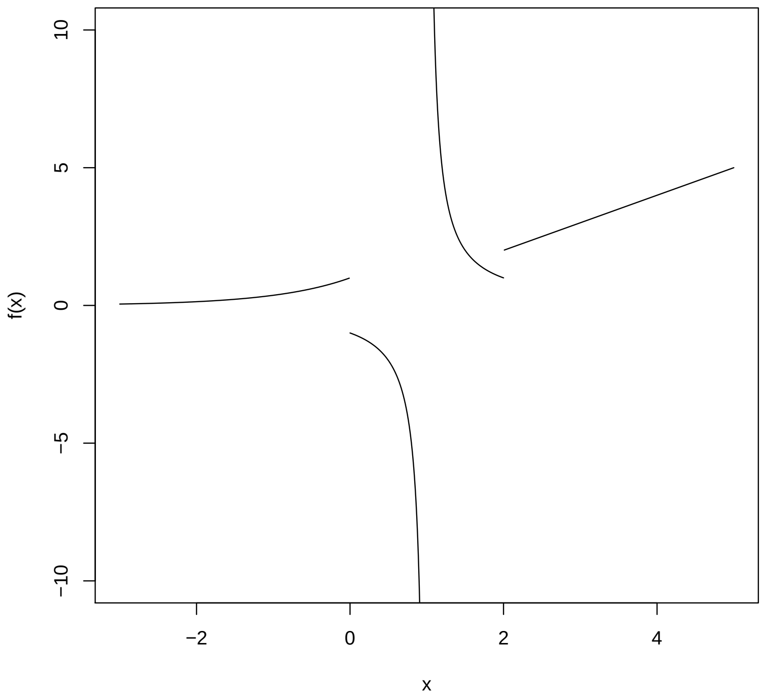
Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{e^{x-1} - 1} = \dfrac{0}{0}$, indeterminación. Usamos la regla de L'Hôpital: $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{e^{x-1} - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{e^{x-1}} = \dfrac{1}{1} = 1$.

Criterios de corrección:

- Detectar indeterminación 0,25 puntos.
- Plantear y ejecutar estrategia de resolución 0,5 puntos.
- Resultado final correcto: 0,25 puntos.

b) La gráfica de la función es:



- En $x=0$: $f(0)=\frac{1}{0-1}=-1$.
  $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x=e^0=1$.
  $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{-1}=-1$.
  La función $f(x)$ no es continua porque los límites laterales no coinciden y la discontinuidad es de salto finito.
- En $x=2$: $f(2)=\dfrac{1}{2-1}=1$.
  $\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-} \dfrac{1}{x-1}=1$
  $\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+} x=2$.
  La función $f(x)$ no es continua porque los límites laterales no coinciden y la discontinuidad es de salto finito.

Criterios de corrección:

- Límites laterales en $x=0$, a derecha: 0,25 puntos, a izquierda: 0.25 puntos.
- Discusión de la continuidad $x=0$: 0,25 puntos
- Límites laterales en $x=2$, a derecha: 0,25 puntos, a izquierda: 0.25 puntos.
- Discusión de continuidad en $x=2$: 0,25 puntos.

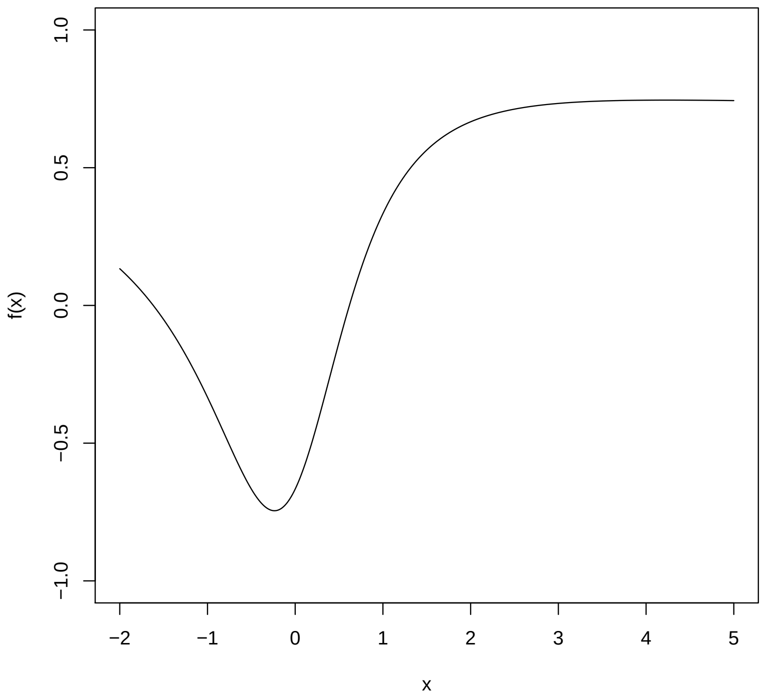
6. Sea la función $f(x)=\dfrac{2x^2+2x-2}{3x^2+3}$.

   a) **[1,5 puntos]** Halla razonadamente las coordenadas de los extremos relativos de la función $f(x)$ y clasifícalos.

   b) **[1 punto]** Calcula la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$.

Solución:

a) La función $f(x)$ es continua y deribable en $\mathbb{R}$ porque es el cociente de dos polinomios y el denominador no se anula en toda la recta real. La gráfica de la función es:



La derivada de la función es $f'(x) = \frac{3(-2x^2+8x+2)}{3^2(x^2+1)^2}$. Las raíces del numerador son $x = 2 \pm \sqrt{5}$.

La derivada puede escribirse como $f'(x) = \frac{-6(x-(2-\sqrt{5}))(x-(2+\sqrt{5}))}{3^2(x^2+1)^2}$. El signo de la derivada es:

- $(-\infty, 2-\sqrt{5})$: signo negativo de la derivada, entonces la función es decreciente.
- $(2-\sqrt{5}, 2+\sqrt{5})$: signo positivo de la derivada, entonces la función es creciente.
- $(2+\sqrt{5}, +\infty)$: signo negativo de la derivada, entonces la función es decreciente.

Por tanto, hay un mínimo local en $x = 2-\sqrt{5}$ y un máximo local en $x = 2+\sqrt{5}$.

Criterios de corrección:

- Cálculo de la derivada: 0'5 puntos.
- Cálculo de los puntos en los que se anula la derivada: 0'5 puntos.
- Discusión para determinar si los puntos son máximo o mínimo: 0'5 puntos.

b) En ambos casos, la recta pasa por el punto de la gráfica $(1, f(1)) = (1, 1/3)$. La pendiente de la recta tangente es $f'(1) = 2/3$ y la de la recta normal es $-1/f'(1) = -3/2$.

La ecuación de la recta tangente es $y-1/3 = \frac{2}{3}(x-1)$ y la de la recta normal es $y-1/3 = \frac{-3}{2}(x-1)$.

Criterios de corrección:

- Cálculo de la recta tangente: 0'5 puntos.
- Cálculo de la recta normal: 0'5 puntos.

7. *a*) **[1 punto]** Sea la función $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + x - 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Determina los valores de a y b para que la gráfica de $f(x)$ pase por el punto $(1, 1)$ y tenga aquí un punto de inflexión.

   b) **[1,5 puntos]** Sea la función $f(x) = x\,\mathrm{sen}(x) - \cos(x)$. Enuncia el teorema de Rolle y úsalo para razonar si la función $f(x)$ tiene al menos un extremo relativo en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución:

- **Criterios de corrección:**
  - Las condiciones son:

a) $f(1) = 1 \longleftrightarrow a + b + 1 - 1 = 1 \longleftrightarrow a + b = 1$.

b) El punto de inflexión viene dado cuando $f''(x) = 0$. La derivada segunda es $f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$. Por tanto, $f''(1) = 6a + 2b = 0 \longleftrightarrow 3a + b = 0$.

Resolviendo para a y b las dos ecuaciones resultantes obtenemos que $a = -1/2$ y $b = 3/2$.

Criterios de corrección:

- Plantear el problema: 0,25 puntos.
- Obtener la primera ecuación: 0,25 puntos.
- Obtener la segunda ecuación: 0,25 puntos.
- Dar los valores correctos de a y b: 0,25 puntos.

- Teorema de Rolle: "Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y derivable en el intervalo (a, b) tal que $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$."

  Como $f(-1) = f(1) = 0{,}3011687$, y $f(x)$ es continua en $[-1, 1]$ (por ser producto y suma de funciones continuas) y derivable en $(-1, 1)$ (por ser suma y producto de funciones derivables), entonces va a existir un punto $c \in (-1, 1)$ en el que la derivada se anula. Este punto será un extremo relativo de $f(x)$.

  Criterios de corrección:

  - Enunciar el teorema de Rolle: 0'5 puntos.
  - Comprobar que se puede aplicar: 0'5 puntos.
  - Justificar el extremo relativo: 0'5 puntos.

8. *a*) En el servicio de urgencias clasifican a los pacientes en leves y graves según llegan al hospital. El 20 % de los pacientes leves debe ingresar en el hospital, mientras que el 60 % de los pacientes graves debe hacerlo. En un día cualquiera llegan al servicio de urgencias un 90 % de pacientes leves y un 10 % de pacientes graves. Si se selecciona un paciente al azar:

   a.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que deba ingresar en el hospital?

   a.2) **[0,75 puntos]** Si se sabe que el paciente tuvo que ingresar, ¿cuál es la probabilidad de que llegara al hospital con una dolencia leve?

   b) En un momento dado llegan 8 pacientes a urgencias.

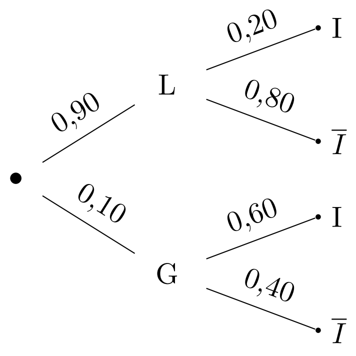
   b.1) **[0,5 puntos]** ¿Qué probabilidad hay de que exactamente 4 pacientes se clasifiquen como leves?

   b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que como mucho 7 pacientes sean clasificados como leves?

n	**k \ p**	**0.1**	**0.2**	**0.3**	**0.4**	**0.5**	**0.6**	**0.7**	**0.8**	**0.9**
8	**0**	0.4305	0.1678	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.3826	0.3355	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0001	0.0000
	2	0.1488	0.2936	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0011	0.0000
	3	0.0331	0.1468	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0092	0.0004
	4	0.0046	0.0459	0.1361	0.2322	0.2734	0.2322	0.1361	0.0459	0.0046
	5	0.0004	0.0092	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.1468	0.0331
	6	0.0000	0.0011	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.2936	0.1488
	7	0.0000	0.0001	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.3355	0.3826
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039	0.0168	0.0576	0.1678	0.4305

Solución:

a) Probabilidad de que llegue un paciente leve es $P(L) = 0{,}9$ y la probabilidad de que sea grave es $P(G) = 0{,}1$. La probabilidad de que ingrese si el paciente es leve es $P(I \mid L) = 0{,}20$ y la probabilidad de que ingrese si es grave es $P(I \mid G) = 0{,}60$.



a.1) **[0,5 puntos]** La probabilidad de que un paciente elegido al azar deba ingresar en el hospital aplicando el teorema de la probabilidad total es: $P(I) = 0{,}20 \cdot 0{,}90 + 0{,}60 \cdot 0{,}10 = 0{,}18 + 0{,}06 = 0{,}24$.

<u>**Criterios de corrección:**</u> *Explicación y planteamiento:* 0,25 *puntos. Resultado correcto:* 0,25 *puntos.*

a.2) **[0,75 puntos]** La probabilidad de que un paciente que haya ingresado tenga una dolencia leve se puede calcular por el Teorema de Bayes o el diagrama:
$P(L \mid I) = \frac{P(L \cap I)}{P(I)} = \frac{0{,}18}{0{,}24} = 0{,}75$.

<u>**Criterios de corrección:**</u> *Explicación y planteamiento:* 0,25 *puntos. Cálculo de probabilidades auxiliares:* 0,25 *puntos. Resultado correcto:* 0,25 *puntos.*

b) Sea X la variable aleatoria de cuántos de esos 8 pacientes que llegan a urgencias se clasifican como leves. X sigue una distribución binomial con $n = 8$ y probabilidad $p = 0{,}90$.

b.1) La probabilidad de que exactamente 4 sean clasificados como leves es $P(X = 4) = \binom{8}{4} 0{,}90^4 \cdot 0{,}10^4 = 0{,}0046$.

<u>**Criterios de corrección:**</u> *Definición de la variable y planteamiento del problema:* 0,25 *puntos. Resolución:* 0,25 *puntos.*

b.2) La probabilidad de que como mucho 7 sean clasificados como leves es $P(X \leq 7) = 1 - P(X = 8) = 1 - 0{,}4305 = 0{,}5695$.

<u>**Criterios de corrección:**</u> *Planteamiento del problema: 0,25 puntos. Justificación del cálculo de la probabilidad: 0,25 puntos. Obtención de la probabilidad final: 0,25 puntos.*